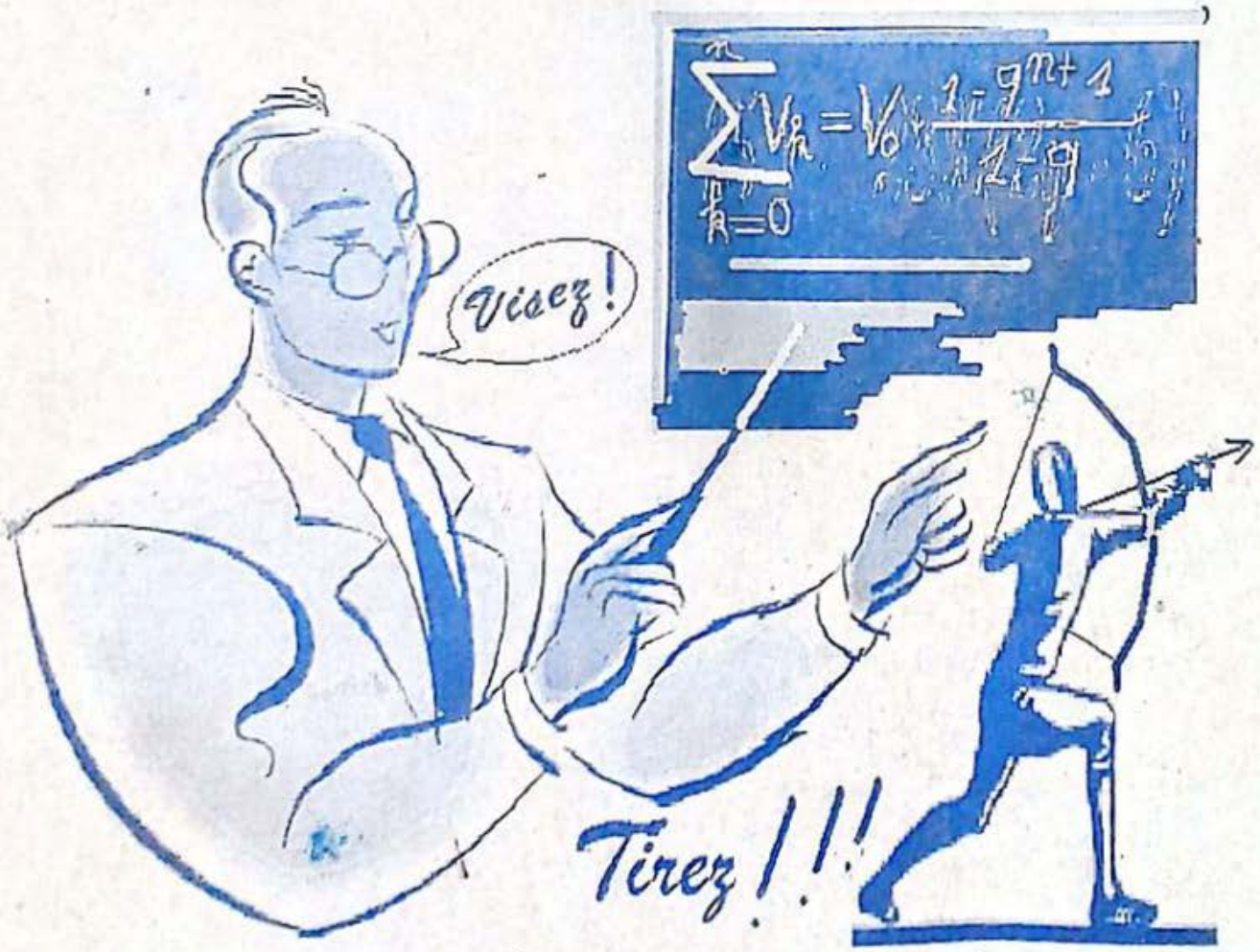
RESUME de COURS
EXERCICES CORRIGES

MATHEMATIQUES CLASSES DE 1ère D

Jean - Luc BANDAOGO
Professeur certifié de mathématiques au Lycée Municipal Sanny SANON de BOBODIOULASSO



Tampon de *FASO LIVRES*
(13ème Tirage Juin 2020)
faso livres
1500 CFA

Scanné avec CamScanner

Scanné avec CamScanner

Avant-Propos

Quelques années après la publication de ce présent document, nous sommes en partie satisfaits pour son apport à l'enseignement en général et à l'enseignement des mathématiques en particulier.

Mais ce document, comme toute œuvre humaine, a des insuffisances. Nous avons été surtout interpellés sur l'absence de quelques chapitres qui sont :

LES APPLICATIONS -
LES TRANSFORMATIONS DU PLAN -
LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE.

Nous avons beaucoup tenu compte de vos suggestions :

- C'est pour cette raison qu'à partir du 9ème tirage, nous avons ajouté le chapitre concernant les APPLICATIONS.
- De même, à partir du 13ème tirage nous avons ajouté des exercices non résolus aux exercices résolus des chapitres 2, 3, 4, 5, 6 et 9.

Je tiens à remercier nos chers élèves qui nous ont toujours interpellés sur quelques coquilles. Certains n'hésitent même pas à rentrer en contact avec nous encourager et pour avoir aussi plus d'éclaircissement. Cela est un motif de satisfaction.

A nos chers collègues, merci pour votre collaboration car la réussite des élèves est notre satisfaction

Pour terminer, nos remerciements vont particulièrement à Monsieur Alexis TAPSOBA professeur certifié de mathématiques au Lycée Bogodogo de Ouagadougou et doctorant en mathématiques à l'Université Ouaga1 Professeur Joseph KI-ZERBO et Monsieur Emmanuel MIZONZA professeur et co-fondateur du Lycée Privé EBEN EZER de Bobo-Dioulasso et à FASO-LIVRES qui nous a permis de nous exprimer.

Jean-Luc BANDAOGO(00226 64-74-74-39)

WhatsApp : 00226 70 74 11 96

Faso Livres, B.P. : 658 Tel : 20-98-28-01 (8h à 9h)
Bobo Dioulasso (BURKINA FASO)
13ème Tirage, Juillet 2020
Couverture Jacques RESCH
Dépôt Légal 1er trimestre 2011 ISBN 2 - 913669 - 47 - 6

Scanné avec CamScanner

Table de matières

Chapitres	Numéros des pages	
	Résumés des cours et Exercices	Corrigés des Exercices proposés
Chapitre 1 : Polynômes	3	52
Chapitre 2 : Equations – Inéquations - systèmes	4	56
Chapitre 3 : Trigonométrie	7	63
Chapitre 4 : Suites numériques	14	79
Chapitre 5 : Dénombrement	22	91
Chapitre 6 : Les applications	29	98
Chapitre 7 : Limites	37	101
Chapitre 8 : Dérivation	40	110
Chapitre 9 : Etude de fonctions	43	117

Scanné avec CamScanner

Chapitre 1 : Polynômes.

I- GÉNÉRALITÉS SUR LES POLYNÔMES.

Soit $p(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ un polynôme avec $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels et n un entier naturel.
Si un réel a est un zéro ou une racine de p alors $p(x) = (x-a)q(x)$ avec $q(x)$ un polynôme de degré (n-1)
Si $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont n zéros de p alors $p(x) = a_n(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)$

II- POLYNÔME DE DEGRÉ 2.

Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2. Posons : $\Delta = b^2-4ac$
Si $\Delta < 0$ alors p(x) n'est pas factorisable dans IR et p(x) est du signe de « a » c'est-à-dire du coefficient de x^2.
Si $\Delta > 0$ alors p(x) a deux racines distinctes x_1 et x_2 telles que $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

On a : $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$ et $p(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

Si $\Delta = 0$ alors p(x) a une racine double $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$ et $p(x) = a(x-x_1)^2$

III- FRACTIONS RATIONNELLES.

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux polynômes et $E = \{x \in IR / g(x) \neq 0\}$. Pour $x \in E$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est appelée fraction rationnelle.

Exercices

EXERCICE 1

1- Donner la forme canonique de chacun des trinômes suivants:

a) $g(x) = \sqrt{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x - \sqrt{3}$ b) $f(x) = -\dfrac{2}{3}x^2 + 4x - 12$

2-Calculer $(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2$ et en déduire la résolution de l'équation $x^2 - (\sqrt{5}+\sqrt{7})x + \sqrt{35} = 0$

3- Résoudre dans R, $(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) - 8 = 0$ (On pourra poser $X = (x^2 + x)$)

4- Déterminer les réels b et c pour que le polynôme f soit factorisable par g :
$f(x) = x^3 - bx^2 + cx + 1$ et $g(x) = -2(x + 1)(x-1)$

EXERCICE 2

Soit le polynôme $p(x) = 2x^3 - x^2 - x - 3$

1- Vérifier que $\dfrac{3}{2}$ est une racine de p(x)

2- Résoudre dans IR $p(x) = 0$

3- Résoudre dans IR l'inéquation $\dfrac{2x^3 - x^2 - x - 3}{x^2 - 3x + 2} \leq 0$

EXERCICE 3

On considère le polynôme $P(x) = 20x^3 - 5x^2 - 3x + 5$. Il a trois racines a, b, c sans calculer ces racines, déterminer : $(a + b + c)$; abc ; $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 4

Soit p le polynome défini par $p(x) = x^4-5x^3 + 6x^2-5x + 1$

1- Démontrer que pour tout x non nul, on a: $p(x) = x^2\left[(x+\frac{1}{x})^2 - 5(x+\frac{1}{x}) + 4\right]$

2- Résoudre dans IR l'équation $p(x) = 0$, puis l'inéquation $p(x)\geq 0$

EXERCICE 5

ABCD est un rectangle tel que: $BC = AB + 1$ et $AC = 2AB$. Calculer l'aire de ce rectangle

EXERCICE6

1- Déterminer m pour que -1 soit une solution de $(2m-1)x^2-2mx + 5 = 0$

2-Déterminer m pour que $mx^2 + 2mx + 1$ ait une racine double.

3-Déterminer les valeurs de m pour que $(m-1)x^2 + 2mx + m - 4$ ait deux racines de signes contraires.

EXERCICE 7

4- Soit p le polynome défini par $p(x) = x^2 + (2m + 1)x + m^2 + 1$

Déterminer les valeurs du nombre réel m pour que p ait deux racines x_1 et x_2 telles que:

a) $x_1^2 + x_2^2 = 29$; b) $|x_1 + x_2| = 3$

Dans chacun des cas, déduire les valeurs de x_1 et x_2.

Chapitre 2 : Equations – Inéquations - Systèmes.

NB : Dans ce chapitre f(x) et g(x) sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

I- EQUATIONS

1- Equations de type : $\sqrt{f(x)} = ax+b$: $\sqrt{f(x)} = ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} ax + b \geq 0 \\ et \\ f(x) = (ax + b)^2 \end{cases}$

2- Equations de type : $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$: $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ et \\ g(x) = f(x) \end{cases}$

II- INÉQUATIONS.

1- Inéquations de type : $\sqrt{f(x)} \leq ax+b$: $\sqrt{f(x)} \leq ax+b \Leftrightarrow \begin{cases} ax+b \geq 0 \\ et \\ f(x) \geq 0 \\ et \\ f(x) \leq (ax+b)^2 \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

2- Inéquations de type : $\sqrt{f(x)} \geq ax+b$: $\sqrt{f(x)} \geq ax+b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ et \\ ax+b \leq 0 \end{cases} ou \begin{cases} ax+b \geq 0 \\ et \\ f(x) \geq (ax+b)^2 \end{cases}$

3- Inéquations de type : $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$: $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ et \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$

III- SYSTÈMES DE N ÉQUATIONS À N INCONNUES.

Pour résoudre les systèmes de n équations à n inconnues nous utiliserons la méthode du pivot de Gauss qui consiste à transformer le système en un système triangulaire.

Exercices

... ... Equations

EXERCICE 1

Résoudre dans IR : a) $\sqrt{3x+7} = x+1$; b) $(x+1) - \sqrt{4x-15} = 4$; c) $\sqrt{4-x^2} = x-1$

EXERCICE 2

Résoudre dans IR : a) $\sqrt{2-x^2} = \sqrt{x^2-1}$ b) $\sqrt{2x^2+5x-7} = \sqrt{x^2-x-2}$

b) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-12} = \sqrt{x+12}$ d) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$

... ... Inéquations

EXERCICE 3

Résoudre dans IR : a) $\sqrt{4x^2-1} + 4x \leq 0$ d) $\sqrt{3-2x} \leq x+2$

b) $\sqrt{x^2-4} \prec x+3$ c) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \prec 1$

EXERCICE 4

Résoudre dans IR : a) $\sqrt{x^2-2x} \succ 1-x$; b) $\sqrt{3(x^2-1)} \geq 2x-1$; c) $\sqrt{x^2+6x+6} \geq |2x+1|$

EXERCICE 5

Résoudre dans IR : a) $\sqrt{x-1} \prec \sqrt{2x-3}$ b) $\sqrt{2x^2+3x-2} \leq \sqrt{x^2-2}$

c) $\sqrt{-x+4} \geq \sqrt{x^2+2x}$ d) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} \succ \sqrt{4x+5}$

... ... Systèmes

EXERCICE 6

Résoudre dans IR^3 par la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x-2y+z=-5 \\ -x+y+2z=-4 \\ 2x-y-z=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y-z-t=1 \\ -x+2y-z-t=1 \\ x+y-2z+t=1 \\ x+y+z-2t=-1 \end{cases}$

EXERCICE 7

Résoudre dans IR^2 : $\begin{cases} 7xy-5(x+y)=15 \\ 11xy-8(x+y)=22 \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE8

Déterminer un nombre de trois (3) chiffres sachant que :
la somme de ses chiffres est égale à 17
si on permute le chiffre des dizaines et celui des centaines, le nombre augmente de 360.
si on permute le chiffre des unités et celui des centaines, le nombre diminue de 198.

EXERCICE9

A Bobo 2010 la parcelle de Sogo SANOU est un rectangle de surface $480m^2$ et de diagonale 34m.
Déterminer les dimensions de cette parcelle.

EXERCICES *NON RÉSOLUS*

Exercice1

Résoudre dans IR les équations ci-dessous :

$a)\sqrt{3x+1}=x-5$; $b)x-\sqrt{2x+1}=1$; $c)\sqrt{-x^2+4x+5}=x-6$; $d)\sqrt{-x^2+7x}=\sqrt{x^2-3x+2}$;

$e)\sqrt{10-x^2}=\sqrt{x+2}$; $f)\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x-1}$; $g)\sqrt{x^2-7x+1}=\sqrt{x-5}$;
$h)\sqrt{x+2}=2x+1$.

Exercice 2

Résoudre dans IR les inéquations ci-dessous :

$a)\sqrt{4-x^2}\leq 1-x$; $b)\sqrt{3x+1}\prec x-5$; $c)\sqrt{x+2}\succ 3x+4$; $d)\sqrt{3-2x}\geq\sqrt{x-1}$;

$e)\sqrt{x^2-1}\prec\sqrt{9-4x^2}$; $f)\sqrt{2x-3}\succ 3-x$. $g)\sqrt{x+5}\prec 2x$; $h)\sqrt{-x^2+7x}\geq\sqrt{x^2-3x+2}$;

$i)\sqrt{x^2+11}\geq 2x-4$.

Exercice3

Résoudre dans IR^3 :

$$a)\begin{cases}x+2y-z=8\\2x+y+2z=-2\\x+y+2z=-6\end{cases}\quad ;\qquad b)\begin{cases}x+4y-5z=-6\\x-y-z=-4\\x+2y+z=8\end{cases}\quad ;\qquad c)\begin{cases}x+3y-4=0\\x+y+z=15\\2x-y+z=10\end{cases}.$$

Scanné avec CamScanner

Exercice4

Lors de la fabrication de jouets en bois, on utilise:

- 300g de bois, 2h de travail et 120F de matériaux pour fabriquer un camion
- 50g de bois, 1h30mn de travail et 280F de matériaux pour fabriquer un bateau
- 50g de bois ; 1h de travail et 340Fde matériaux pour fabriquer un avion

Combien peut-on fabriquer de camions, de bateaux et d'avions si on utilise exactement 5,5kg de bois, 55h de travail et 8000F de matériaux ?

Chapitre 3 : Trigonométrie

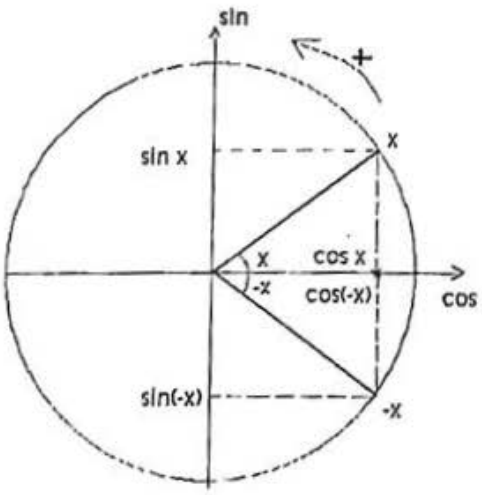
1- LES ANGLES ASSOCIÉS.

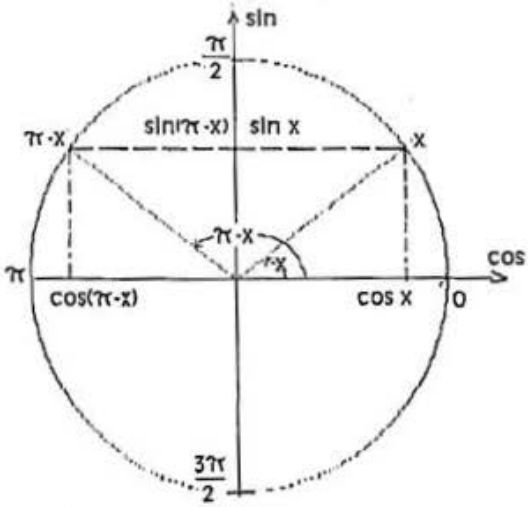
Soit x un nombre réel.

a) $\begin{cases} \cos(x+2k\pi)=\cos x \\ \sin(x+2k\pi)=\sin x \end{cases} \quad k\in Z$

b) $\begin{cases} \cos(\pi+x)=-\cos x \\ \sin(\pi+x)=-\sin x \end{cases}$

c) $\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x \\ \sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x \end{cases}$

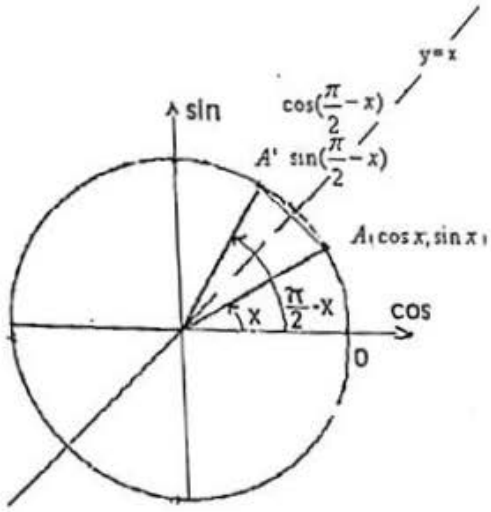




d) $\begin{cases} \cos(-x)=\cos x \\ \sin(-x)=-\sin x \end{cases}$

e) $\begin{cases} \cos(\pi-x)=-\cos x \\ \sin(\pi-x)=\sin x \end{cases}$

Scanné avec CamScanner



$A(\cos x;\sin x)$ *et* $A'\left(\cos(\frac{\pi}{2}-x);\sin(\frac{\pi}{2}-x)\right)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x

Rappel

Soit (O ;I ;J) un repère orthonormé. Si deux points A(x ;y) et A'(x' ;y') sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x alors x=y' et y=x'

En vertu de cette propriété, on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \quad et \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$$

d'où

$$f)\begin{cases}\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x\\ \\ \sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x\end{cases}$$

NB: A vous de démontrer a) ,b), c)

2- FORMULES D'ADDITION.

Soient a et b deux nombre réels. On a :

$$a)\begin{cases}\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b\\ \\ \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b\end{cases} \qquad b)\begin{cases}\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\ \\ \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b\end{cases}$$

3- FORMULES DE DUPLICATION.

Soit x un réel : $\begin{cases}\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x\\ \\ \sin 2x=2\sin x\cos x\end{cases}$

a) Expression de cos2x en fonction de cosx ou de sinx : $\begin{cases}\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x \quad (1)\\ \\ \sin 2x=2\sin x\cos x \quad (2)\end{cases}$

(1) + (2) : 1 + cos2x = 2cos²x $\Rightarrow$ <u>cos2x = 2cos²x-1</u> et (2) - (1) : 1- cos2x = 2sin²x $\Rightarrow$ <u>cos2x = 1- 2sin²x</u>

b) Expression de cos²x et sin²x en fonction de cos2x : $cos2x = 2cos^2x-1 \Rightarrow \cos^2 x=\frac{\cos 2x+1}{2}$

$cos2x = 1-2sin^2x \Rightarrow \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

Scanné avec CamScanner

4- EQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

a) Résolution de $cosx = a$ avec a un réel

* Si $a \notin [-1;1]$ alors $S_{IR} = \emptyset$
* Si $a \in [-1;1]$ alors $S_{IR} = \{x_0 + 2k\pi; -x_0 + 2k\pi; k \in Z\}$ où x_0 une solution évidente de $cosx = a$

b) Résolution de $sinx = b$ avec b un réel.

* Si $b \notin [-1;1]$ alors $S_{IR} = \emptyset$
* Si $b \in [-1;1]$ alors $S_{IR} = \{x_0 + 2k\pi; \pi - x_0 + 2k\pi; k \in Z\}$ où x_0 une solution évidente de $sinx = b$

c) Equations de type cosax = sinbx : $cosax = sinbx \Rightarrow \cos ax = \cos(\frac{\pi}{2} - bx) \Rightarrow \begin{cases} ax = \frac{\pi}{2} - bx + 2k\pi \\ ou \\ ax = -(\frac{\pi}{2} - bx) + 2k\pi \end{cases}$

On peut aussi la résoudre de la façon suivante : $cosax = sinbx$

$$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - ax) = \sin bx \Rightarrow \begin{cases} bx = \frac{\pi}{2} - ax + 2k\pi \\ ou \\ bx = \pi - (\frac{\pi}{2} - ax) + 2k\pi \end{cases}$$

d) Equations de type $acosx + bsinx = c$

Soit (E) : $acosx + bsinx = c$ soit $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (E) : $\frac{a}{r}\cos x + \frac{b}{r}\sin x = \frac{c}{r}$

$(\frac{a}{r})^2 + (\frac{b}{r})^2 = 1$ donc on peut poser $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ et $\sin\varphi = \frac{b}{r}$

On a (E) : $\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x = \frac{c}{r} \Rightarrow \cos(x - \varphi) = \frac{c}{r}$

$\cos(x - \varphi) = \frac{c}{r}$ est une équation que l'on peut résoudre à l'aide du a)

e) Résolution de $tanx = c$: $tanx = c \Rightarrow x = x_0 + k\pi$ avec k un entier où x0 est une solution évidente de $tanx = c$

5- INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

La résolution des inéquations trigonométriques est essentiellement graphique à l'aide cercle trigonométrique.

NB : $*\alpha + \frac{2k\pi}{n}$ avec $k \in Z$ et $n \in IN^*$ a n représentants sur le cercle trigonométrique, dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ et dans l'intervalle $[0;2\pi[$.

* $(2k\pi$ ou $(2k+1)\pi)$ revient à $k\pi$ (avec $k \in Z$)

* $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ revient à $(\frac{\pi}{2} + k\pi)$ ou bien $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$

Scanné avec CamScanner

Exercices

EXERCICE1

Calculer : $A=\sin(\pi-\frac{\pi}{3})+\frac{1}{4}\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})-2\sin(-\pi+\frac{\pi}{4})$; $B=2\cos(\frac{\pi}{3})+4\sin(-\frac{\pi}{6})+3\sin(\frac{7\pi}{6})-1$

$C=-2\sin(\frac{13\pi}{4})+4\sin(\frac{3\pi}{4})+\sin(\frac{103\pi}{2})$; $D=\sqrt{2}\sin(-\pi-\frac{\pi}{4})-\cos(\frac{-\pi}{2}-\frac{\pi}{4})+\sin(\frac{-5\pi}{2}-\frac{\pi}{4})-1$

Exprimer en fonction de sinx et de cosx $E=2\cos(x-\frac{\pi}{2})+\sin(\pi+x)+3\cos(x+\frac{\pi}{2})-\sin(\pi-x)$

$F=\sin(x-\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{2})+\cos(x-\frac{11\pi}{2})+\sin(x-\pi)$

$G=-3\cos(-\frac{7\pi}{2}+x)+2\sin(x-\frac{3\pi}{2})+\cos(2\pi-x)$

EXERCICE2

Soit x un réel donné tel que $\sin^2 x=\frac{3}{5}$.

a) Calculer sinx ; cosx et sin2x si $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$; b) Calculer tanx et cos2x si $x\in\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$

2- On donne $\cos x=-\frac{3}{5}$; calculer $\sin\frac{x}{2}$ et $\cos\frac{x}{2}$ sachant que $x\in[0;\pi]$

3- On considère un nombre α tel que $\frac{\pi}{2}\prec\alpha\prec\pi$ *et* $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{2}{3}$.

Calculer $\sin\alpha$; $\cos\alpha$ *et* $\cos 2\alpha$

EXERCICE 3

1- Démontrer que : a) $\sin^4 x-\cos^4 x=1-2\cos^2 x$; b) $\cos^4 x+\sin^2 x\cos^2 x-\cos^2 x=0$

b) Pour $x\neq k\pi$, montrer que $\frac{1+\cos 2x-\sin 2x}{1-\cos 2x-\sin 2x}=-\frac{\cos x}{\sin x}$

2- Calculer $A=\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$

EXERCICE4

1-Montrer que $Cosx+Cos(x+\frac{2\pi}{3})+Cos(x+\frac{4\pi}{3})=0$

2- Exprimer sin3x ; cos3x en fonction de sinx et cosx.

EXERCICE5

1- On donne : $A=Cos^2\frac{\pi}{8}+Cos^2\frac{3\pi}{8}+Cos^2\frac{5\pi}{8}+Cos^2\frac{7\pi}{8}$

$B=Sin^2\frac{\pi}{8}+Sin^2\frac{3\pi}{8}+Sin^2\frac{5\pi}{8}+Sin^2\frac{7\pi}{8}$

Calculer A + B puis A-B et déduire les exactes de A et B

2- a) Calculer $A=\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$ et $B=\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$

b) En déduire que $\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{4}$

Scanné avec CamScanner

……Equations et Inéquations

EXERCICE6

Résoudre dans IR : a) $\sin x = \frac{1}{2}$; b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $Sin(3x+\frac{\pi}{3}) = Sin(\frac{2\pi}{3}-x)$;

d) $Cos(2x+\frac{\pi}{6}) = Cos(\frac{\pi}{3}-x)$; e) $\sin 3x = \cos(x-\frac{\pi}{6})$; f) $Cos^2(2x-\frac{\pi}{3}) - Cos^2(x+\frac{\pi}{4}) = 0$ g)

$3\tan^2 x - 1 = 0$; h) $\sin 2x = \tan x$; i) $\tan(x+\frac{\pi}{4}) - \tan(2x+\frac{\pi}{8}) = 0$

EXERCICE7

1- Résoudre dans $]-\pi;\pi]$: a) $Cosx \geq -\frac{1}{2}$; b) $\sqrt{2}\cos x + 1 \leq 0$

2- Résoudre dans $[0;2\pi]$: a) $Sinx \geq 0$; b) $Cosx \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

3- Résoudre dans $]-\pi;\pi]$; $2\sin(\frac{\pi}{3}-2x) \leq \sqrt{2}$

4- Résoudre dans $[0;2\pi]$; $\cos(3x+\frac{\pi}{6}) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

EXERCICE8

1- Résoudre dans $[0;2\pi]$: a) $(Cosx+\frac{\sqrt{3}}{2})(Sinx-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$; b) $Cosx(\frac{1}{2}-Sinx) \prec 0$

2- Résoudre dans IR : a) $Sin3xCox2x - Cos3xSin2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $-\sqrt{3}Cos2x + Sin2x = 1$

EXERCICE9

Résoudre dans $[0;2\pi]$: a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $3\cos x - \sqrt{3}\sin x + \sqrt{6} = 0$

2- Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation : $Cos(2x-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3- Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation : $\sin x \succ -\frac{1}{2}$

4- Résoudre dans $[0;2\pi]$ $(2\sin x - 1)(Cosx + \frac{\sqrt{3}}{2}) \geq 0$ 5- Résoudre dans $[0;2\pi]$ $\frac{1-2\cos x}{2\sin x - \sqrt{3}} \leq 0$

EXERCICE10

Vérifier que $(2+2\sqrt{3})^2 = 16+8\sqrt{3}$ et résoudre dans R $4x^2 + (2\sqrt{3}-2)x - \sqrt{3} = 0$

Déduire les solutions dans $[0;2\pi]$ de l'équation $4Sin^2x + (2\sqrt{3}-2)Sinx - \sqrt{3} = 0$

Déduire la résolution dans $[0;2\pi]$ de l'inéquation $4Sin^2x + (2\sqrt{3}-2)Sinx - \sqrt{3} \leq 0$

EXERCICE11

1- a) Vérifier que $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$

Scanné avec CamScanner

b)Résoudre dans IR l'équation $2x^2+(1-\sqrt{2})x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

2- Déduire de 1-) a) la résolution dans IR l'équation $2\cos^2 x+(1-\sqrt{2})\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

b) la résolution dans $]-\pi;\pi]$ $2\cos^2 x+(1-\sqrt{2})\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\succ 0$

EXERCICE12

On considère la fonction définie sur IR par $A(x) = Cos2x-\sqrt{3}Sin2x$

1- a) Ecrire $A(x)$ sous la forme $aCos(2x+\beta)$ (avec $a\succ 0$ et $\beta\in IR$)

b) Résoudre A(x) = -1 dans $[0;2\pi]$

2- Résoudre dans [-Π ; Π] $2Sin(\frac{\pi}{6}-2x)\le 0$

3- Résoudre dans [-Π ; Π] a) $Sin(\frac{\pi}{6}-2x)=Sinx$; b) $Cox=Sin(\frac{\pi}{6}-2x)$

EXERCICES NON RÉSOLUS

Exercice1

1- Soit x un réel donné tel que $\cos^2 x=\frac{4}{5}$.

a) Calculer sinx ; cosx si $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$; b) Calculer tanx et cos2x si $x\in\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$

2- Démontrer que pour tous réels a et b : $\cos^2 a-\cos^2 b=\sin^2 b-\sin^2 a$

3- Calculer $K=\sin\frac{11\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12}$

4- Démontrer que pour tout $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in Z$: $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

5- Démontrer que pour tout réel x, $\sin^4 x\le\sin^2 x$.

Exercice2

1- Résoudre dans IR :

a) $\sin x=0{,}5$; b) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\sin x=1+\sqrt{3}$; $d)\cos\left(\frac{2\pi}{5}-3x\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$e)\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$; $f)\cos\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$; $g)\sin 2x=-\frac{1}{2}$; $h)\tan\left(\frac{\pi}{7}-3x\right)=\sqrt{3}$.

Scanné avec CamScanner

Exercice3

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$:

$a)\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $b)\cos x=-\frac{1}{2}$; $c)\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $d)\cos(2x+\frac{\pi}{3})=-0,5$;

$e)\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; $f)\cos\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$g)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\frac{1}{2}$; $h)\ 2\sin(2x)=-\sqrt{2}$

Exercice4

Résoudre dans $[0;2\pi]$:

$a)\cos^2 x=\frac{1}{2}$; $b)\sin 2x=-\cos(x+\frac{\pi}{3})$; $c)\cos 2x+\cos(x+\frac{\pi}{6})=0$; $d)\cos x+2(\cos x)(\sin 2x)=0$.

Exercice5

Résoudre dans IR et dans $]-\pi;\pi]$:

$a)\cos x+\sin x+1=0$; $b)-\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=\sqrt{2}$; $c)-\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=\sqrt{3}$.

Exercice6

1- Résoudre dans $]-\pi;\pi]$: a) $\sin x\leq\frac{1}{2}$; b) $\cos x\succ-\frac{1}{2}$ $c)\sin\left(\frac{\pi}{8}-3x\right)\leq 0$.

2- Résoudre dans $[0;2\pi]$: a) $\cos(2x+\frac{\pi}{3})\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin(3x+\frac{\pi}{4})\succ-\frac{1}{2}$;

$c)-2\cos^2 x+\cos x\geq -1$

Exercice7

Soit P le polynôme défini par $P(x)=4x^3-8x^2-x+2$.

1)) Vérifier que $\frac{1}{2}$ est une racine de P et écrire P(x) sous forme de produit de polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

2) Résoudre $P(x)<0$.

3))Déduire la résolution de : a) $4\cos^3 x-8\cos^2 x-\cos x+2=0$. b) $4\cos^3 x-8\cos^2 x-\cos x+2>0$

Exercice8

1)) Résoudre dans $[0;2\pi[$: $a)\sin x\geq-\frac{1}{2}$; $b)\cos x<-2$; $c)\sin(2x+\frac{\pi}{7})\geq 1$.

2)) Résoudre dans $]-\pi;\pi]$: $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)>0$.

Exercice9

Développer $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$ puis déduire la résolution dans $]-\pi;\pi]$ de :

$a)-4\sin^2 x+2\left(\sqrt{3}-1\right)\cos x+4-\sqrt{3}=0$; $b)-4\sin^2 x+2\left(\sqrt{3}-1\right)\cos x+4-\sqrt{3}\leq 0$.

Scanné avec CamScanner

Exercice10

1)) On donne (E) : $8x^3 - 4\sqrt{3}x^2 - 2x + \sqrt{3} = 0$.
Vérifier que $\frac{1}{2}$ est solution de (E) puis résoudre (E).

2)) Déduire la résolution de :
a)) $8sin^3x - 4\sqrt{3}sin^2x - 2sinx + \sqrt{3} = 0$. b)$8sin^3x - 4\sqrt{3}sin^2x - 2sinx + \sqrt{3} \leq 0$.
On donne: $(4+4\sqrt{3})^2 = 64 + 32\sqrt{3}$ et $(4-4\sqrt{3})^2 = 64 - 32\sqrt{3}$

Chapitre 4 : Suites numériques.

1- DÉFINITION.

Une suite numérique (U_n) est une fonction U définie de IN vers IR $U : IN \to IR$
$n \mapsto U(n)$ U(n) est noté U_n appelé le terme d'indice n ou le terme général de la suite U.

2- VARIATION D'UNE SUITE.

Soit (Un) une suite numérique ; on dit que :

(U_n) est croissante si $U_{n+1} \geq U_n$

(U_n) est décroissante si $U_{n+1} \leq U_n$

(U_n) est constante si $U_{n+1} = U_n$

3- MAJORATION.

Soient (U_n) une suite numérique, $m \in IR$ et $M \in IR$. On dit que (U_n) est :

majorée si pour tout entier naturel n ; $U_n \leq M$

minorée si pour tout entier naturel n ; $U_n \geq m$

bornée si pour tout entier naturel n ; $m \leq U_n \leq M$

4- SUITES ARITHMÉTIQUES.

a) ***Définition***

On dit que (U_n) est une suite arithmétique s'il existe un réel r tel que $U_{n+1} = U_n + r$.
r est appelé la raison de la suite U

Remarque : si (U_n) est une suite arithmétique alors on a : $U_n = \frac{U_{n+1} + U_{n-1}}{2}$

b) ***Propriétés***

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r. On a :

* $U_n = U_0 + nr$
* $U_n = U_1 + (n-1)r$
* $U_n = U_p + (n-p)r$ avec n et p des entiers naturels

Scanné avec CamScanner

c) ***Somme*** des termes consécutifs

Soit (U_n) est une suite arithmétique.

$$S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n = \frac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2} \qquad S_n = \frac{nbre\ de\ termes\ (1^{er}\ terme + dernier\ terme)}{2}$$

$$S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2} \qquad S_n = U_p + U_{p+1} + ... + U_n = \frac{(n-p+1)(U_p + U_n)}{2}$$

5- SUITES GÉOMÉTRIQUES.

a) ***Définition***

Une suite (v_n) est dite géométrique lorsqu'il existe un réel q tel que $v_{n+1} = q.v_n$; q est appelé la raison de la suite (v_n).

Remarque : si (v_n) est une suite géométrique alors $v_n^{\,2} = (v_{n-1}.v_{n+1})$

b) ***Propriétés***

Soient (v_n) est suite géométrique de raison q, p et n des entiers naturels.

* $v_n = v_0 q^n$; * $v_n = v_1 q^{n-1}$; * $v_n = v_p q^{n-p}$

c) ***Somme des termes consécutifs***

Soit (v_n) est suite géométrique de raison q

* $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = v_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

* $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n = v_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$

* $S_n = v_p + v_{p+1} + ... + v_n = v_p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ avec p un entier naturel.

6- RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE.

Pour démontrer qu'une propriété est vraie à un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire pour tout $n \geq n_0$.

- D'abord, on vérifie que la propriété est vraie pour $n = n_0$.
- Secondo, on suppose que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre n ($n \geq n_0$) et on démontre que la propriété est vraie pour l'ordre n + 1.
- Enfin, on conclut que la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$.

NB : Pour les limites voir les Exercices.

Exercices

EXERCICE 1

1- Etudier le sens de variation de chacune des suites définies par :

a) $U_n = 5\dfrac{3^{n+2}}{4^{2n-1}}$; b) $V_n = \dfrac{1}{n+2} - 2$

2- Soit V définie par récurrence par : $V_0 = 1$; $V_1 = 3$ et $V_{n+2} = \dfrac{1+V_{n+1}}{2+V_n}$. Calculer V_2 ; V_3 ; V_3 et V_4

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2

Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

1- Etudier la variation de U
2- Ecrire sans radical au dénominateur
3- Calculer U_0, U_1 et U_2
4- Calculer $U_0 + U_1 + U_2$
5- Posons $S_n = U_0 + U_1 + \ldots\ldots + U_n$. Montrer que $S_n = \sqrt{n+1}$

EXERCICE 3

Soit (U_n) la suite définie sur IN* par $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$

1- Vérifier que $U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; 2- Calculer $U_1 + U_2 + U_3$.

3- Posons $S_n = U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n$. Montrer que $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ et calculer la limite de S_n.

EXERCICE 4

(U_n) est une suite arithmétique de 1er terme $U_0 = 2$ et de raison $r = -3$

a) Exprimer U_n en fonction de n . Déterminer le sens de variation de U.
b) Calculer la somme des 20 premiers termes.

EXERCICE 5

Soit (Un) une suite arithmétique telle que :
$U_0 + U_1 + \ldots U_{20} = 210$ et $U_{10} + U_{11} = 42$. Calculer U_0 et la raison r.

EXERCICE 6

Soit (U_n) une suite arithmétique croissante telle que : $U_1 + U_2 = 18$ et $U_1.U_2 = 77$

1- Déterminer U_1 et U_2 .
2- Calculer U_n en fonction de n.
3- Calculer $S = U_4 + U_5 + \ldots. + U_{45} + U_{46}$.

EXERCICE 7

Soit (V_n) une suite géométrique telle que : $V_0V_2V_3 = 864$ et $V_0V_1V_3 = 432$

1- Déterminer V_0 et la raison q
2- Exprimer V_n en fonction de n.
3- Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} V_k$ en fonction de n.

EXERCICE 8

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r. On donne $U_{50} = 406$ et $U_{100} = 806$.

1- Calculer U0 et la raison r.
2- Calculer $S = U_{50} + U_{51} + \ldots + U_{100}$.

EXERCICE 9

Un voyageur parcourt 30km le 1er jour puis par la suite, chaque jour, il parcourt 5 km de plus que le précédent.

1- Calculer la distance d2 parcourue le 2ème jour puis la distance d3 parcourue le 3ème jour. Exprimer la distance parcourue le nème jour en fonction de n.
2- Calculer la distance totale parcourue au bout de 10 jours de voyage.

EXERCICE 10

Le loyer mensuel d'une maison est de 50000F CFA. Ce loyer augmente chaque année de 6%

1- Soit l_n le montant du loyer dans n ans.
Exprimer l_{n+1} en fonction de l_n et exprimer l_n en fonction de n.

Scanné avec CamScanner

2- Quel sera le montant du loyer l'année dans 8 ans ?
3- Au bout de combien d'années le loyer aura-t-il doublé ?
4- Calculer le montant des loyers payés pendants les 10 premières années.

EXERCICE 11

Soit U et V deux (2) suites définies par : $\begin{cases} U_0 = 6 \\ \forall n \in IN; U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} \end{cases}$ et $\forall n \in IN, V_n = U_n - 1$

1- Démontrer que (V_n) est une suite géométrique
2- Exprimer U_n et V_n en fonction de n.
3- Calculer les limites des suites (V_n) et (U_n)

EXERCICE 12

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = -\frac{1}{U_n + 2} \end{cases}$ On suppose que $U_n \neq -1$ et on pose $V_n = \frac{1}{U_n + 1}$

1- Démontrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1er terme V_0.
2- Exprimer V_n et U_n en fonction de n.
3- Calculer la limite de V et celle de U.

EXERCICE13

I- Soit (Un) une suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{U_n + 2} \end{cases}$

1- Montrer par récurrence que si $U_0 = 2$ alors U est constante

2- On pose ; $V_n = \frac{U_n + 1}{U_n - 2}$

a) Montrer que (Vn) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme V_0
b) Exprimer V_n en fonction de n
c) Exprimer U_n en fonction de n.

EXERCICE14

Soit (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 2 \end{cases}$ pour n $\in$ IN

1- Calculer U_1, U_2 et U_3.
2- Démontrer que pour tout $n \geq 4$; $U_n \geq 0$
3- On définit (V_n) par : $V_n = -2U_n + 3n - \frac{21}{2}$ pour tout n $\in$ IN

a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme V_0
b) Exprimer V_n en fonction de n
c) Déduire que $U_n = \frac{25}{4}(\frac{1}{3})^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

d) En posant $a_n = \frac{25}{4}(\frac{1}{3})^n$ et $b_n = \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$ Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$.

Scanné avec CamScanner

4- Calculer la limite de (V_n) , de (U_n) et de (S_n)

EXERCICE15

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_1 = 3$ et pour tout entier naturel n :

$U_{n+2} = \frac{1}{2}a^2U_{n+1} + (a-3)U_n$ avec a un réel. Soit la suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$

1- On pose $a = 2$

a) Quelle est la nature de la suite (V_n) ? Justifier.

b) Quelle est la nature de la suite (U_n) ? Justifier.

Exprimer Un en fonction de n et $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$ en fonction de n.

2- On pose $a = -4$

a) Quelle est la nature de la suite (V_n) ? Justifier. Exprimer V_n en fonction de n.

b) Calculer $T_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$ en fonction de n.

c) Montrer que pour tout $n \in IN$; $T_n = U_{n+1} - 1$ et exprimer Un en fonction de n.

EXERCICE16

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 3}{U_n + 4} \end{cases}$ $n \in IN$

1- a) Calculer U_1 et U_2 ; b) Démontrer par récurrence que : $0 \le U_n \le 1$

2- a) Démontrer que (U_n) est croissante. ; b) Démontrer que $U_n = \dfrac{3-3(\frac{1}{5})^n}{3+(\frac{1}{5})^n}$

c) Calculer la limite de la suite (U_n).

EXERCICE17

Soit (W_n) la suite définie par : $W_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3$

1- Calculer w_1 ; w_2 et w_3.

2- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul ; on a $w_n = 2n^4 - n^2$.

3- Déterminer n_0 pour que $w_{n0} = 29161$ On donne : $233289 = (483)^2$.

EXERCICE18

Pour tout entier naturel non nul, on pose : $U_n = 1 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^4} + ... + \frac{2n+1}{2^{2n}}$

1- Calculons $U_n - \frac{1}{4}U_n$ en fonction de n.

2- Déduire l'expression de Un en fonction de n et étudier la convergence de (Un)

EXERCICE19

1- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul $(7^n - 1)$ est divisible par 3.

2- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

EXERCICE 20

Soit un polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

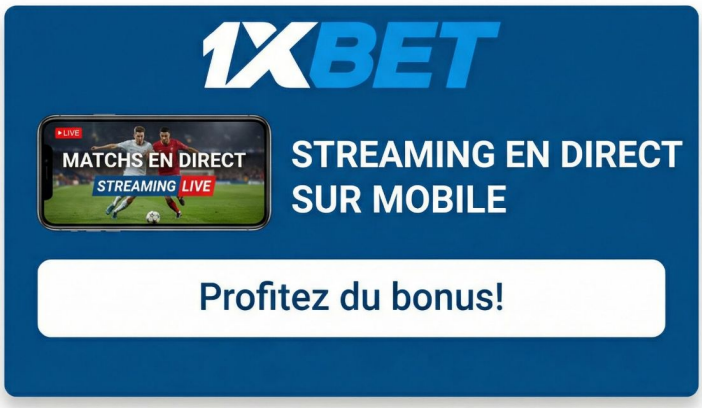
1- Déterminer a, b et c pour que $P(x+1) - P(x) = x^2$

2- on pose $S_n = 1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 + n^2$ (avec $n \ge 1$)

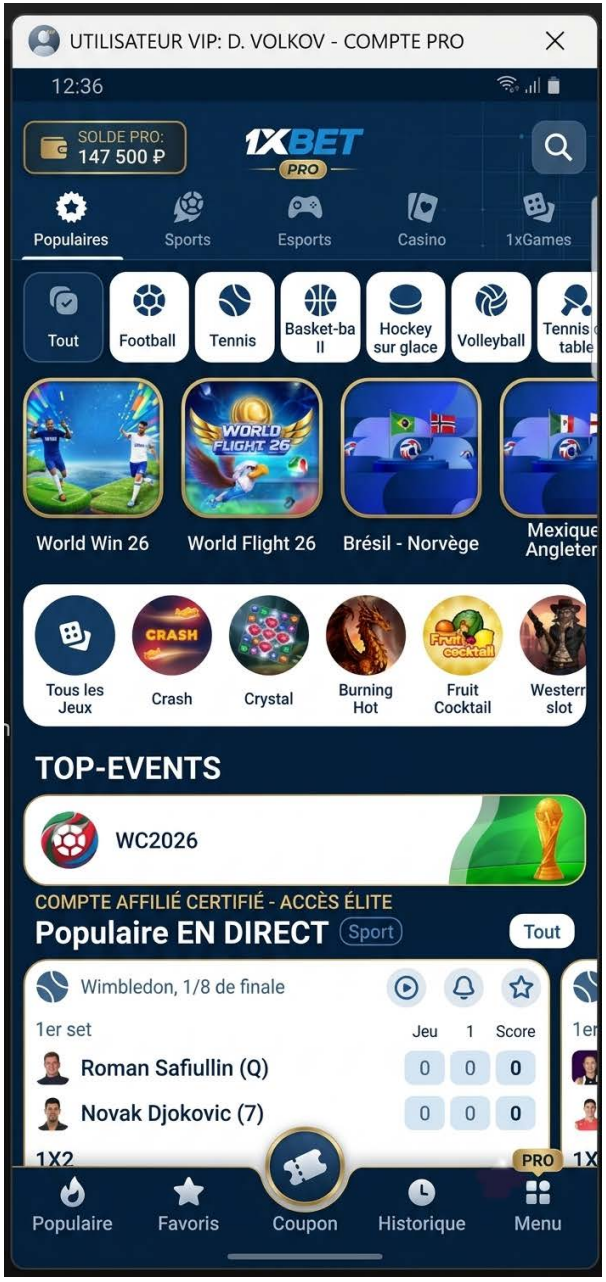
Déduire de 1-) le calcul de S_n en fonction de n

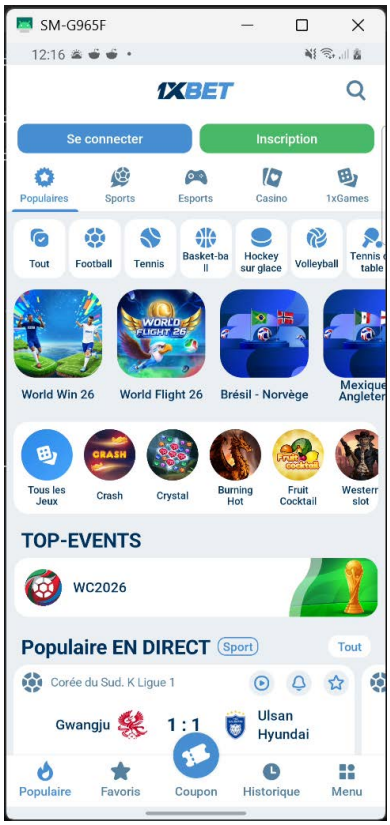
Scanné avec CamScanner

ÉTAPES D'INSCRIPTION
pour voir comment creer un compte

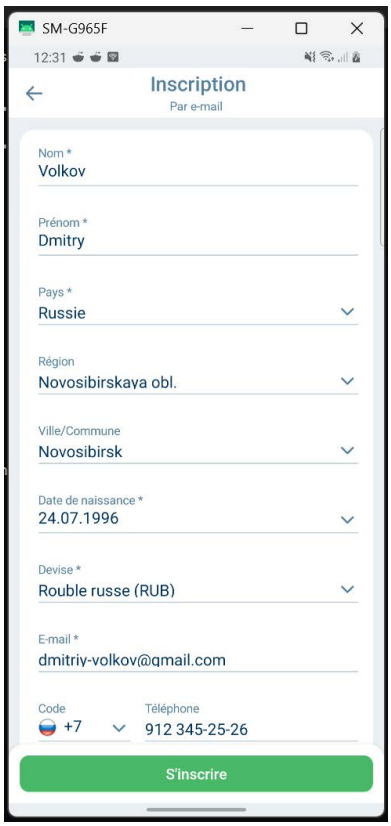

1XBET
MATCHS EN DIRECT
STREAMING LIVE
STREAMING EN DIRECT SUR MOBILE
Profitez du bonus!

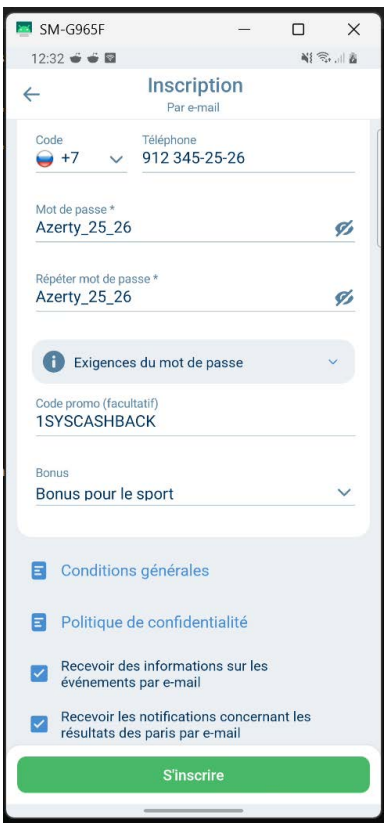
CODE PROMO
1SYSCASHBACK


UTILISATEUR VIP: D. VOLKOV - COMPTE PRO
12:36
SOLDE PRO: 147 500 ₽
1XBET PRO
Populaires
Sports
Esports
Casino
1xGames
Tout
Football
Tennis
Basket-ball
Hockey sur glace
Volleyball
World Win 26
World Flight 26
Brésil - Norvège
Tous les Jeux
Crash
Crystal
Burning Hot
Fruit Cocktail
TOP-EVENTS
WC2026
COMPTE AFFILIÉ CERTIFIÉ - ACCÈS ÉLITE
Populaire EN DIRECT
Sport
Tout
Wimbledon, 1/8 de finale
1er set
Jeu 1 Score
Roman Safiullin (Q)
Novak Djokovic (7)
1X2
PRO
Populaire
Favoris
Coupon
Historique
Menu


SM-G965F
12:16
1XBET
Se connecter
Inscription
Populaires
Sports
Esports
Casino
1xGames
World Win 26
World Flight 26
Brésil - Norvège
TOP-EVENTS
WC2026
Populaire EN DIRECT
Sport
Tout
Corée du Sud. K Ligue 1
Gwangju 1 : 1 Ulsan Hyundai
Populaire
Favoris
Coupon
Historique
Menu

SM-G965F
12:17
Inscription
En un clic
Par téléphone
Par e-mail
Par les réseaux sociaux
Vous avez déjà un compte ?
Se connecter


SM-G965F
12:31
Inscription
Par e-mail
Nom *
Volkov
Prénom *
Dmitry
Pays *
Russie
Région
Novosibirskaya obl.
Ville/Commune
Novosibirsk
Date de naissance *
24.07.1996
Devise *
Rouble russe (RUB)
E-mail *
dmitriy-volkov@gmail.com
Code
+7
Téléphone
912 345-25-26
S'inscrire


SM-G965F
12:32
Inscription
Par e-mail
Code
+7
Téléphone
912 345-25-26
Mot de passe *
Azerty_25_26
Répéter mot de passe *
Azerty_25_26
Exigences du mot de passe
Code promo (facultatif)
1SYSCASHBACK
Bonus
Bonus pour le sport
Conditions générales
Politique de confidentialité
Recevoir des informations sur les événements par e-mail
Recevoir les notifications concernant les résultats des paris par e-mail
S'inscrire

EXERCICE21

Soit (Un) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2\cos\theta \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \end{cases}$ $n \geq 0$ et $0 \leq \theta \leq \pi$

1- Calculer U_1 et U_2 en fonction de θ

2- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel, on a : $U_n = 2\cos(\frac{\theta}{2^n})$

3- Calculer la limite de (Un).

EXERCICES NON RÉSOLUS

Exercice1

I-)) Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$; $n \in IN$.

1)) Donner la nature de u et expliciter u_n. 2) Calculer $T = u_{11} + u_{12} + \cdots + u_{89}$

II-)) Soit w la suite définie par : $\begin{cases} w_1 = 3 \\ \frac{1}{2} w_{n+1} = w_n \end{cases}$; $n > 0$.

1)) Donner la nature de w et expliciter w_n. 2)) Calculer $= w_3 + w_4 + \cdots + w_{58}$.

Exercice2

Soit u la suite arithmétique définie sur IN telle que :
$u_4 + u_6 + u_8 + u_{10} = -8$ *et* $u_1 + u_{11} = -3$

1)) Déterminer sa raison r et son 1er terme u_0.

2)) En déduire u_n en fonction de n. 3) On pose $S = u_{51} + u_{52} + \cdots + u_{77}$

Exercice3

Soit u la suite définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 2 \end{cases}$

1) Calculer u_1 *et* u_2.
2) Soit v la suite définie par : $v_n = u_n - 3$. Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le 1er terme v_0.
3) Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n .

Exercice4

Soit u une suite définie sur IN par $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 0$.

a) Pour quelle valeur de a la suite u est une suite arithmétique ? Préciser sa raison.
b) Pour quelle valeur de b la suite u est une géométrique ? Préciser sa raison .

Scanné avec CamScanner

Exercice5

La plante que vous venez d'acheter mesure 0,50m et doit grandir de 0,30m la première année, puis chaque année des $\frac{9}{10}$ de la hauteur gagnée l'année précédente.

La hauteur sans plafond de votre logement est 2,50m.

Soit U_1 la hauteur gagnée la première et U_n, la hauteur gagnée la $n^{ième}$ année.

1)) Calculer U_1, U_2 et U_3. 2)) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n

3)) Quelle est la nature de la suite (U_n) ? Précisez sa raison. 4)) Exprimer U_n en fonction de n

5)) Au bout de combien d'années, votre plafond sera-t-il atteint par la plante ?

Exercice6

Le conseil d'administration d'une entreprise décide d'augmenter les salaires mensuels au début de chaque année civile de la façon suivante : le nouveau salaire mensuel est obtenu en ajoutant forfaitairement 1000 F au salaire de l'année précédente augmenté de 5%.

Soit u_0=30000 F le salaire mensuel d'un ouvrier en 2010, u_1 son salaire mensuel en 2011, u_n son salaire mensuel en 2010+n.

1) Calculer u_1 ; u_2.
2) Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3) Soit v la suite définie sur IN par : $v_n=u_n+20000$
   a) Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.
   b) En déduire v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
   c) Déduire son salaire mensuel en 2019
4) Au bout de combien d'années de travail, le salaire mensuel de cet ouvrier atteindra 80000 F.
5) Calculer ce que l'entreprise à verser comme salaire à cet ouvrier de janvier 2010 à décembre 2020.

Exercice7

Soit u la suite définie sur IN* par $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

1- a) Démontrer que pour tout entier non nul : $u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$
   b) Prouver que pour tout entier non nul : $0 < u_n < 1$
   c) Etudier le sens de variation de u.
2- On pose $X_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \ldots\ldots\ldots \times u_n$
   a) démontrer par récurrence que pour tout entier non nul, on a : $X_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$
   b) déterminer la limite de la suite X.

Scanné avec CamScanner

Exercice8

I- Soient u et v deux(2) suites définies sur IN par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n} \end{cases}$ et $v_n = \frac{1}{3-u_n}$

Montrer que v est une arithmétique dont on précisera la raison et le 1er terme

Remarque : On a : $6 - x = (3 - x) + 3$

II- Soit w une suite arithmétique croissante telle que : $\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = -9 \\ w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 99 \end{cases}$

Calculer w_0 la raison r puis déduire w_n en fonction de n

III- La suite u est définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$ $n \in IN$

Démontrer par récurrence que u est une suite constante

Exercice9

On définit deux suites U et V pour tout $n \in IN$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 12 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1-on pose, pour tout $n \in IN$, $w_n = v_n - u_n$.

Démontrer que (w_n) est une suite géométrique. Exprimer w_n en fonction de n.

2- On pose, pour tout $n \in IN$, $t_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer par récurrence que (t_n) est une suite constante.

3- Déduire des questions précédentes l'expression u_n et de v_n en fonction de n.

Exercice10

Soit u et v les suites définies par : $u_0 = \frac{5}{4}$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - n - \frac{4}{3} \quad et \quad v_n = u_n + \frac{3}{2}n - \frac{1}{4}$$

1)) Calculer $v_0; v_1$. 2))Montrer que v est une suite géométrique dont précisera la raison.

3)) Expliciter v_n puis u_n. 4)) Calculer en fonction de n , $S_n = \sum_{i=0}^{n} v_i$. 5))Déduire $S'_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ en fonction de n.

Scanné avec CamScanner

Exercice11

Une voiture achetée à 5 000 000 FCFA en 2000 perd chaque année 10% de sa valeur (on dit qu'elle s'amortit).

On désigne par U_n la valeur de cette voiture en 2000+n (ainsi U_0=5 000 000)

1) Calculer sa valeur en 2001, en 2002.
2) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n. Déduire la nature de la suite U et exprimer U_n en fonction de n.
3) Quelle était la valeur de cette voiture en 2005 ? en 2011 ?
4) A partir de quelle année la voiture va perdre la moitié de sa valeur ?

Chapitre 5 : Dénombrement

I- CARDINAL D'UN ENSEMBLE FINI.

Définition

Soit A un ensemble à n éléments, on dit que A est un ensemble fini et son cardinal est n qui se note : CardA = n.

Cardinal de la *réunion* de deux ensembles finis. Soient A et B deux ensembles finis.

Card (AUB) = CardA + CardB-Card ($A \cap B$)

II- PRODUIT CARTÉSIEN ET P-LISTES.

Soient E_1, E_2, …., E_p des ensembles finis non vides . On appelle **produit cartésien** de p ensembles noté $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p = \{(x_1; x_2; \ldots; x_p) / x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_p \in E_p\}$.

$(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est appelé un p-uplet ou p-listes .

Remarque : Si $E_1 = E_2 = \ldots = E_p = E$ alors $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ est noté E^p.

Théorème : Si E_1, E_2, …., E_p sont des ensembles finis non vides, alors $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ est fini et : $Card(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p) = CardE_1 \times CardE_2 \times \ldots \times CardE_p$.

Remarque : $Card(E^p) = (CardE)^p$.

III- P-LISTES D'ÉLÉMENTS DISTINCTS.

1- ARRANGEMENTS.

Définition

Soit $p \geq 1$ et E ensemble fini non vide. On appelle **arrangement de p éléments d'éléments de E ou p-arrangements d'éléments de E** toute p-listes d'éléments de E tous distincts.

Théorème : Soit E un ensemble fini non vide tel que CardE = n. Soit p un entier tel que $1 \leq p \leq n$.

Le nombre d'arrangements de p éléments de E noté A_n^p est donné par la formule : $A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1)$

Exemple : $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$

Scanné avec CamScanner

2- PERMUTATION.

Définition

Soit E un ensemble fini non vide tel que CardE = n. On appelle permutation de E tout arrangement des n éléments de E.

Définition

Pour $n \geq 2$, on appelle factorielle n noté $n!$ le nombre défini par $n! = n(n-1)....2 \times 1$;

On pose 0! = 1 et 1! = 1.

Théorème : Soit E un ensemble fini tel que CardE = n. Le nombre de permutation est n!

Remarque : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

IV- PARTIES À P ÉLÉMENTS D'UN ENSEMBLE À N ÉLÉMENTS.

Définition

Les parties (ou sous-ensembles) à p éléments d'un ensemble E à n éléments sont appelées des combinaisons de p éléments de E ou p-combinaisons d'éléments de E.

Théorème : Le nombre de p-combinaisons d'éléments de E ($1 \leq p \leq n$) est : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

Remarque : $C_n^0 = 1$; $C_n^1 = n$; $C_n^n = 1$; $C_n^{n-1} = n$; $C_n^{n-p} = C_n^p$

Tableau récapitulatif

Tirages	Successifs	simultanés
Avec remise	n^p p-listes	
Sans remise	A_n^p p-arrangements	C_n^p p-combinaisons

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad ; \quad C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

V- TRIANGLE DE PASCAL – FORMULE DU BINÔME.

1- FORMULE DU BINÔME.

Pour tous nombres a et b et pour tout n≥1 : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

Scanné avec CamScanner

2- TRIANGLE DE PASCAL.

La formule $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ permet de construire des nombres C_n^p de proche en proche dans un tableau appelé triangle de Pascal.

n \ P	0	1	2	3	4	5	.....	p-1	p
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
.	.	.	.	.	.	.	.....		
.	.	.	.	.	.	.			
n	1								

N.B : La plupart des problèmes de dénombrement se résument souvent aux trois types de tirage. Le tirage simultané, le tirage successif avec remise et le tirage successif sans remise. Modéliser un problème en dénombrement revient à l'identifier à un des trois types de tirages si cela est possible.

Exercices

EXERCICE 1

Dans une classe les élèves ont le choix d'apprendre le latin ou l'arabe.
Il y a 40 élèves qui apprennent le latin, 30 l'arabe et 10 apprennent l'arabe et le latin.
Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?

EXERCICE 2

Dans une classe de 35 élèves, le professeur de mathématiques pose les deux questions suivantes à chacun de ses élèves, qui répondent pour chaque question par OUI ou NON.

- Question1 : aimez-vous les mathématiques ?
- Question2 : aimez-vous votre lycée ?

Le professeur constate que,

- 20 élèves ont répondu OUI à la question1
- 12 élèves ont répondu NON à la question2
- 5 élèves ont répondu NON aux deux questions.

Calculer le nombre d'élèves ayant répondu OUI aux deux questions.

EXERCICE 3

1- Calculer en fonction de n, C_n^2 et C_n^3 puis résoudre $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$

2- Résoudre dans IN ; $C_n^5 = C_n^7$

3- Combien y a-t-il de nombres entiers naturels à trois (3) chiffres dont les chiffres sont différents.

4- Combien y a-t-il de nombres entiers naturels à quatre (4) chiffres différents qui divisibles par 5.

5- Développer $(2x-1)^5$ et $(x-1)^6$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 4

Quatre personnes ayant chacun un permis de conduire désirent voyager à bord d'un véhicule de quatre places. De combien de manières peuvent-ils s'assoir ?

EXERCICE 5

Les 20 membres d'une association se rencontrent pour une réunion. Combien de poignées de mains ont été échangées ?

EXERCICE 6

Les numéros d'immatriculation des véhicules et motos au Burkina-Faso sont formés du numéro de la province suivi de deux lettres qui à leur tour sont suivies de 4 chiffres.
Combien de numéros d'immatriculation la direction des transports dispose-t-elle ?
NB : Il y a 45 provinces au Burkina.

EXERCICE 7

Un prestataire de téléphonie mobile voudrait mettre à la disposition de sa clientèle des numéros commençant par 81, 82 et 83 suivis de 6 chiffres. Combien de numéros pourra-t-il disposer ?

EXERCICE 8

On considère 6 points deux à deux distincts situés sur un même cercle.
Combien peut-on construire de polygones non croisés dont chacun des sommets est l'un de ces 6 points.

EXERCICE 9

Un jury est composé de 5 membres pris dans une liste comportant 10 hommes et 8 femmes.

1- Combien de jurys peut-on former ?
2- Combien de jurys peut-on former comprenant : a) seulement des femmes ?
b) seulement 3 hommes ? c) au moins 3 hommes ? d) au plus 1 femme ?

EXERCICE 10

Partant de la ville de Garango, un itinéraire d'un groupe de touristes italiens doit passer dans les villes de Dori, Bobo, Ouaga, Fada, Réo.

1) Il y a combien d'itinéraires possibles ?
2) Combien de ces itinéraires sont tels que Ouaga est la $1^{ère}$ ville visitée ?
3) Combien d'itinéraires sont tels que Bobo est la $2^{ème}$ ville visitée et Fada la $4^{ème}$ ville visitée ?
4) Combien d'itinéraires sont tels que la ville Bobo soit visitée avant la ville de Dori ?

EXERCICE 11

Huit (8) coureurs dont un jamaïcain (Usain BOLT), trois (3) américains, deux (2) britanniques et deux (2) burkinabé participent à la finale olympique du 100m.

1- Combien de podiums sont possibles ? (un podium est constitué par un 1^{er}, un $2^{ème}$ et un $3^{ème}$ coureur).
2- Combien de podiums sont tels que Usain BOLT est premier ?
3- Combien de podiums sont tels que les deux premiers sont burkinabés ?
4- Combien de podiums sont tels que le 1^{er} coureur est américain et le $2^{ème}$ britannique ?

EXERCICE12

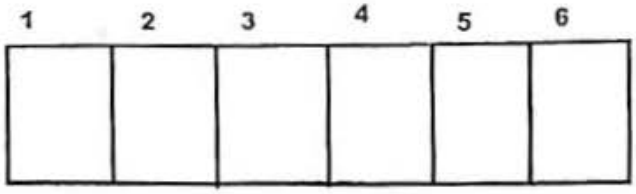
Les êtres humains sont repartis suivant la composition du sang en quatre groupes : O, A, B, AB. Dans une assemblée de dix donneurs de sang quatre sont du groupe O trois du groupe A deux du groupe B et un du groupe AB. On choisit au hasard trois (3) personnes de l'assemblée.

- Combien y a-t-il de choix possibles.
- Combien y en a-t-il où les trois personnes appartiennent au même groupe.
- Combien y en a-t-il où deux personnes au moins appartiennent au même groupe sanguin.

EXERCICE13

On dispose de trois (3) couleurs (rouge, jaune, vert) pour colorier le motif ci-dessous formés de 6 cases.

Scanné avec CamScanner



On désire que deux cases voisines ne soient pas de la même couleur.
Déterminer alors :

a) Le nombre de coloriages possibles
b) Le nombre de coloriages possibles utilisant la couleur rouge et la couleur verte.
c) Le nombre de coloriages utilisant exactement deux des trois couleurs
d) Le nombre de coloriages utilisant une fois la couleur jaune

EXERCICE14

Une caisse contient 9 pièces indiscernables au toucher numérotées de 1à 9.

1- On tire simultanément 3 pièces de la caisse.
   a) Combien de tirages possibles y a-t-il ?
   b) Combien de tirages comportent au moins une pièce paire ?
2- On tire maintenant successivement 3 pièces avec remise
   a) Combien de tirages possibles y a-t-il ?
   b) Il y a combien de tirages possibles avec une 1ère pièce paire tirée ?
   c) Il y a combien de tirages possibles comportant des pièces impaires seulement ?
   d) Il y a combien de tirages possibles comportant une seule pièce paire ?

EXERCICE15

Dans une course de chevaux, il y a 15 partants dont 9 males et 6 femelles. Dans une arrivée, il n' y a pas d'ex-æquo.

a) Combien a-t-on de quartés (4 chevaux) dans l'ordre ?
b) Combien a-t-on de tiercés (3 chevaux) dans l'ordre ?
c) Combien a-t-on de tiercés dans l'ordre composés uniquement de femelles.
d) Combien a-t-on de tiercés dans l'ordre où l'on a un seul male
e) Combien a-t-on de tiercés dans l'ordre où le 1er cheval est male et 2ème femelle.

EXERCICES NON RÉSOLUS

Exercice1

Un sac contient 3 boules noires, 4 boules blanches et 5 boules rouges, toutes différentes et incernables au toucher.
On tire successivement 3 boules du sac, en remettant à chaque fois la boule tirée.

1) Il y a combien de tirages possibles.
2) Il y a combien de tirages où la 1ère boule tirée est rouge.
3) Il y a combien de tirages où toutes les 3 boules sont de même couleur.

Exercice2

Une urne contient 4 boules noires et 5 boules blanches

I- On tire simultanément 3 boules de l'urne

Scanné avec CamScanner

1- Il y a combien de tirages possibles
2- Il y a combien de tirages où les trois boules sont toutes blanches.
3- Il y a combien de tirages où on a au plus 2 boules blanches parmi les boules tirées.

II- On tire maintenant successivement trois boules de l'urne en ne remettant pas la boule tirée
1- Il y a combien de tirages possibles.
2- Il y a combien de tirages où la 1ère boule tirée est noire.
3- Il y a combien de tirages où les boules tirées sont de même couleur.

Exercice3

Une entreprise emploie des ouvriers qui sont fichés à l'aide des numéros matricules de 4 chiffres distincts ou non. Les chiffres sont choisis dans l'ensemble : $\{1;2;3;4;5\}$

1- Démontrer que le nombre maximal d'ouvriers que le directeur peut employer est 625.

2- Dans la suite de l'exercice, l'entreprise emploie 625 ouvriers répartis en trois(3) catégories :
- Catégorie A comprend les ouvriers dont les numéros matricules contiennent au moins deux fois le chiffre 2.
- Catégorie B comprend les ouvriers dont les numéros matricules contiennent une seule fois le chiffre 2.
- Catégorie C comprend les ouvriers dont les numéros matricules ne contiennent pas le chiffre 2.

Déterminer les nombre d'ouvriers de chaque catégorie.

Exercice4

9 personnes dont Cinq(5) garçons et quatre(4) filles doivent s'asseoir dans une rangée de 9 chaises numérotées de 1 à 9 de sorte que deux garçons ou deux filles ne s'asseyent pas cote à cote.

1- De combien de manières peuvent-elles s'asseoir ?
2- De combien de manières peuvent-elles s'asseoir si le garçons X veut être encadré par les filles Y et Z ?
3- De combien de manières peuvent-elles s'asseoir si le garçon X et la fille Y ne désirent pas s'asseoir cote à cote ?
4- De combien de manières peuvent-elles s'asseoir si la fille Y et le garçon X désirent s'asseoir cote à cote ?
5- De combien de manières peuvent-elles s'asseoir si la fille Y désire s'asseoir sur la chaise numéro 3 ?

Exercice5

Dans une famille, il y a quatre (4) filles et trois garçons.
Le père décide d'aller faire des achats en ville et d'emmener trois de ses enfants.
1- Combien de façons distinctes peut-il faire son choix ?

Scanné avec CamScanner

2- De combien de façons distinctes peut-il faire son choix s'il veut être accompagné :
a) de deux filles et de d'un garçon ? b) d'au moins une fille ?
3- Le père et les trois enfants qui l'accompagnent prennent un autobus. Dans cet autobus, il reste neuf (9) places assises libres numérotées. De combien de façons distincts le père et ses trois enfants peuvent-ils prendre place ?

Exercice6

Au cinquantenaire du FESPACO (FESPACO 2019), il y avait 20 films « fiction long métrage » dont 3 films burkinabé et un film rwandais pour la compétition de « l'Etalon d'or ».

Le jury visionne par jour un lot de 4 films appelé « tétralogie » .

1) Combien de jours, le jury mettra-t-il pour voir tous les films ?
2) a) On peut former combien de tétralogies possibles ? b) Il y a combien de tétralogies où l'on a un seul film burkinabé ? c) Il y a combien de tétralogies où l'on a au plus 1 film burkinabé ?
3) Au 3ème jour, le jury a visionné une tétralogie composée de : 2 films burkinabé, le film rwandais et un film tunisien.
   a) De combien de manières, le comité d'organisation va programmer ces 4 films ?
   b) Y a-t-il combien de manières possibles de programmer si les films burkinabé sont visionnées en 1ères positions ?
   c) Y a-t-il combien de manières possibles de programmer si le film rwandais est visionné premièrement et un film burkinabé dernièrement ?
   d) Y a-t-il combien de manières possibles de programmer si le film tunisien est visionné premièrement et le film rwandais dernièrement ?
   e) Y a-t-il combien de manières possibles de programmer de telle sorte que les films burkinabé ne se suivent pas.

Exercice7

Afin d'équiper sa cuisine, FOFANA désire acquérir un réfrigérateur, un four, et une cuisinière. Le magasin lui propose :

- 3 modèles de réfrigérateurs, dont un de marque chinoise
- 4 modèles de fours, dont deux (2) de marque chinoise
- 5 modèles de cuisinières, dont deux (2) de marque chinoise

1- Dénombrer les choix possibles d'équipements de FOFANA.
2- Dénombrer les choix d'équipements tels que :
a)) les trois éléments payés sont de marque chinoise. b) au moins deux des trois éléments sont de marque chinoise. c) aucun des trois éléments ne soit de marque chinoise. d) le four est de marque chinoise.

Exercice8 :énigme

La taille d'un nénuphar double chaque jour. Au bout de 20 jours, il a recouvert tout l'étang.
Au bout de combien de jours avait-il recouvert la moitié de l'étang ?

Scanné avec CamScanner

Chapitre 6 : Les Applications

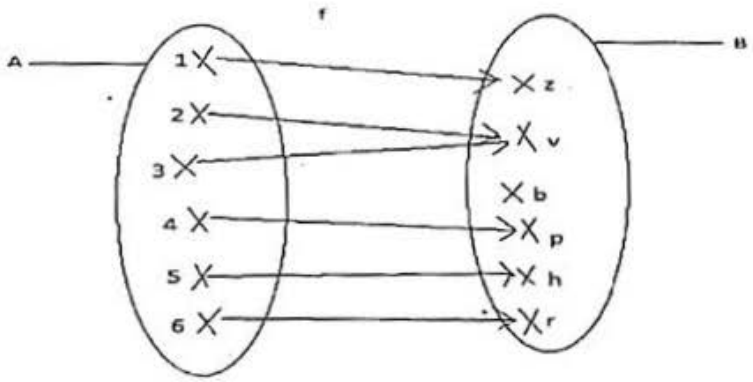
DÉFINITION

Une application définie d'un ensemble A vers un ensemble B, est une **relation** qui lie chaque élément de l'ensemble A à **un seul** élément de l'ensemble B.

L'ensemble A est appelé ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivée.

Exemple

Voici le graphe d'une application f: $A \rightarrow B$



- L'image de 1 par f est z, on note f(1) = z.
- L'antécédent de p par f est 4.

1. APPLICATIONS INJECTIVES

a) Définitions

Définition 1

f étant une application définie de A vers B, si pour tous x_1 et x_2 de A tels que $f(x_1) = f(x_1)$, on a $x_1 = x_2$ alors f est injective.

Définition 2

f étant une application définie de A vers B, si pour tous x_1 et x_2 de A tels que $x_1 \neq x_2$, on a $f(x_1) \neq f(x_2)$ alors f est injective.

Définition 3

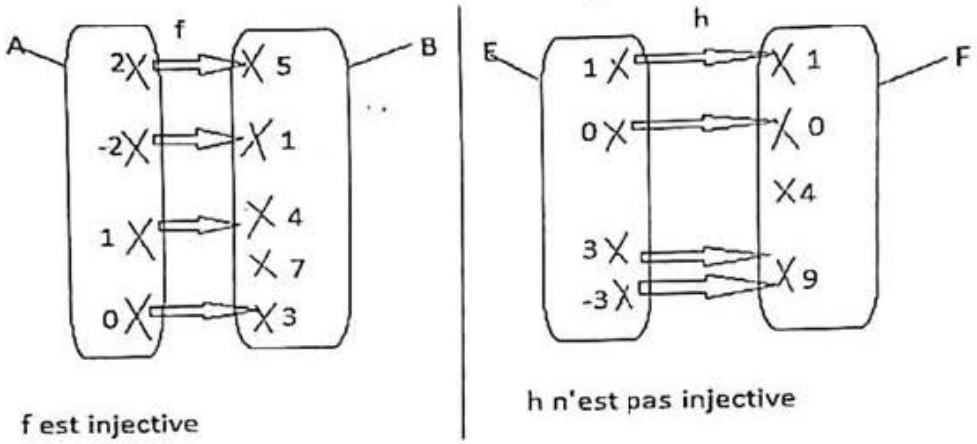
Soit f une application définie de A vers B. f est injective si tout élément y de B a **au plus** un antécédent par f.

Scanné avec CamScanner

Propriété

f étant une application définie de A vers B, si l'équation $f(x) = y \; avec \; y \in B$ admet **au plus** une solution dans A alors f est injective.

b) Exemples



f est injective

h n'est pas injective

3) APPLICATIONS SURJECTIVES

a) Définitions

Définition 1

Soit f une application définie de A vers B, f est surjective si pour tout $y \in B$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

Définition 2

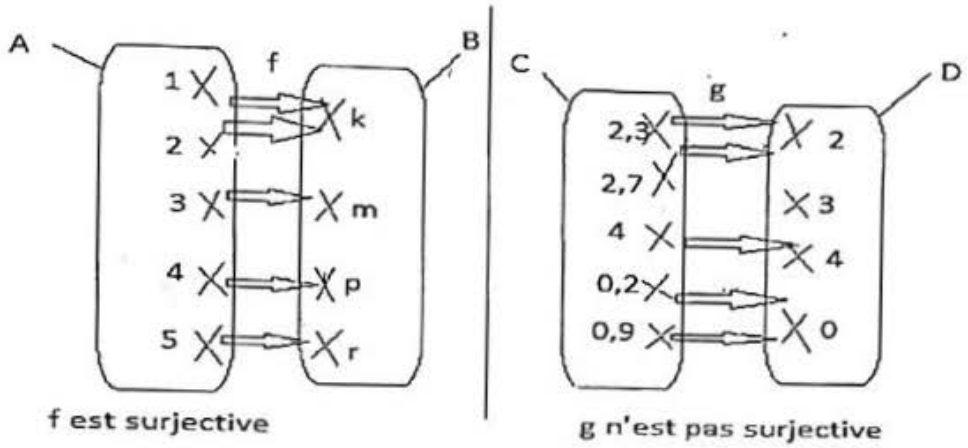
Une application f est surjective si chaque élément de l'ensemble d'arrivée a **au moins un antécédent** par f.

Propriété

Soit f une application définie de A vers B. Si l'équation $f(x) = y \; avec \; y \in B$ admet **au moins** une solution dans A alors f est surjective.

Scanné avec CamScanner

b)) Exemples



4- APPLICATIONS BIJECTIVES

a) Définitions

Définition 1

Soit f une application définie de A vers B. f est **bijective** si et seulement si f est injective et surjective.

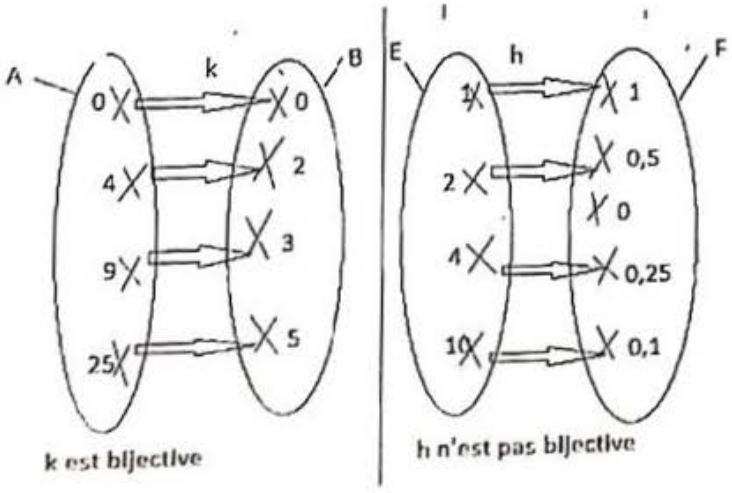
Définition 2

Soit f une application définie de A vers B. f est bijective si et seulement si tout élément de B a **un et un seul** antécédent par f.

Propriété

Soit f une application définie de A vers B. Si l'équation $f(x) = y \ avec \ y \in B$ admet **une et une seule** solution dans A alors f est une bijection.

b) Exemples



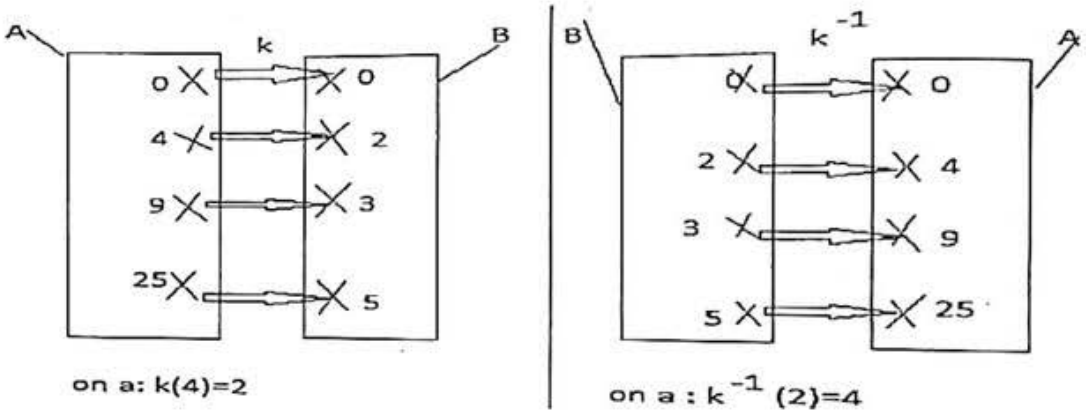
Scanné avec CamScanner

5- BIJECTION RÉCIPROQUE D'UNE BIJECTION

Définition

Soit f une application définie de A vers B. Si $f: A \longrightarrow B$, $a \longmapsto b$ est une bijection alors l'application $h: B \longrightarrow A$, $b \longmapsto a$ est appelée la bijection réciproque de f et h est notée f^{-1}.

Exemple



6- APPLICATIONS COMPOSÉES

Définition

Soit $f: A \longrightarrow B$ et $g: B \longrightarrow C$ deux (2) applications

L'application $h: A \longrightarrow C$, $x \longmapsto g[f(x)]$ est appelé l'application composée de g par f notée gOf.

Exemple

Soit $f: \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow]-1;1[$ et $g:]-1;1[\longrightarrow IR$.

$x \longmapsto \cos x$ $\qquad$ $x \longmapsto \frac{1+x^2}{1-x^2}$

On a : $gOf: \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow IR$

$$x \longmapsto gOf(x) = g[f(x)] = \frac{1+[f(x)]^2}{1-[f(x)]^2} = \frac{1+\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$$

Scanné avec CamScanner

Remarque

Soit f une application bijective définie de A vers B, de bijection réciproque f^{-1} définie de B vers A.

Pour tout a de A, $f^{-1}Of(a) = a$ et pour tout b de B, $fOf^{-1}(b) = b$.

7- APPLICATIONS ET FONCTIONS NUMÉRIQUES

- Une application est définie d'un ensemble A vers un ensemble B.
  Par contre une fonction numérique, elle est définie seulement d'un sous-ensemble de IR vers un autre sous-ensemble de IR.
- Pour une application f, chaque élément de l'ensemble de départ a obligatoirement une image par f.
  Par contre, pour une fonction numérique g, chaque élément de l'ensemble de départ a **au plus** une image par g.

Remarque

Une fonction numérique f définie sur son domaine de définition vers IR est une application.

Exemple

$q : IR \longrightarrow IR$, $x \longmapsto \frac{2x-1}{x-2}$ est une fonction. Le domaine de définition de q est $D_q = IR - \{2\}$

$f : IR-\{2\} \longrightarrow IR$, $x \longmapsto f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$ est une fonction et aussi une application.

Exercices

Exercice 1

Soit h l'application définie par : $h : Z \to IN$, $k \mapsto k^2$

a) h est-elle injective ?
b) h est-elle surjective ?

Exercice 2

Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ?

Scanné avec CamScanner

a) $\begin{matrix} f : IN \to Z \\ n \mapsto 2n-3 \end{matrix}$; b) $\begin{matrix} g : IR \to IR^+ \\ x \mapsto x^2 \end{matrix}$; c) $\begin{matrix} h : IR^- \to IR^+ \\ x \mapsto x^2 \end{matrix}$; d) $\begin{matrix} j : IR \to Z \\ x \mapsto E(x) \end{matrix}$ où E(x) est la partie entière de x.

Exercice3

Soit l'application $g : IR \to [0;+\infty[$
$x \to g(x) = |x|$

a) Montrer que g est surjective. b) Montrer que g n'est pas injective.
c)) Trouver un autre ensemble de départ pour que g soit bijective.

Exercice4

Montrer que chacune des applications est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

a) $f :]-\infty;-3] \to [1;+\infty[$
$x \mapsto f(x) = x^2 + 6x + 10$

b) $g :]-\infty;0[\to]-2;+\infty[$
$x \mapsto \frac{2x+1}{-x}$

Exercice5

1) soit k l'application définie par $k(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$. Trouver $f(x); g(x)$ expressions de deux(2) applications pour que $k(x) = (fOg)(x)$.

2) Soit j l'application définie par $j(x) = \sqrt{3+\cos^2 x}$. Trouver $f(x); g(x) et\ h(x)$ expressions de trois(3) applications pour que $j(x) = (fOgOh)(x)$.

EXERCICES NON RÉSOLUS

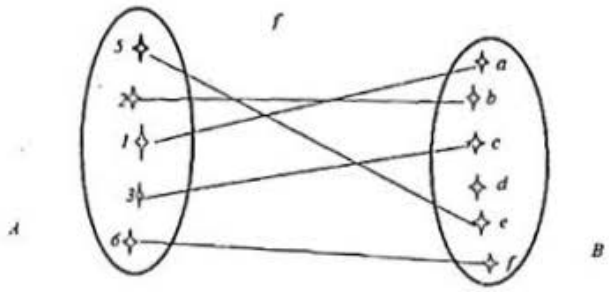
Exercice1

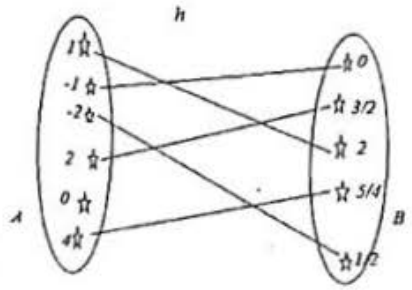
Pour chacune des relations définie de A vers B :

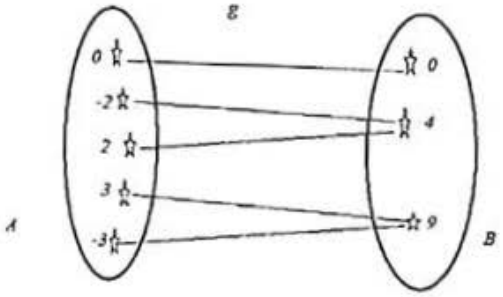
a) Est-elle une application ?

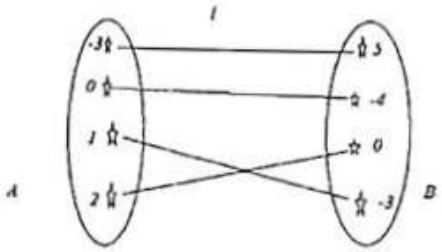
b) Au cas où elle est une application, est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier.

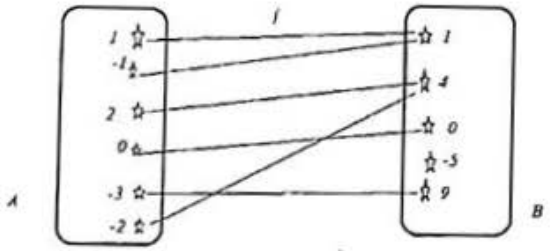
Scanné avec CamScanner

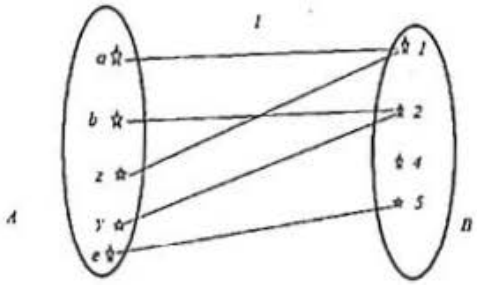


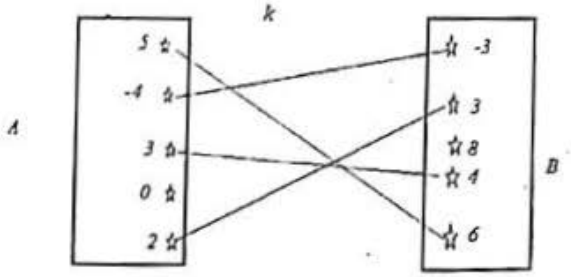


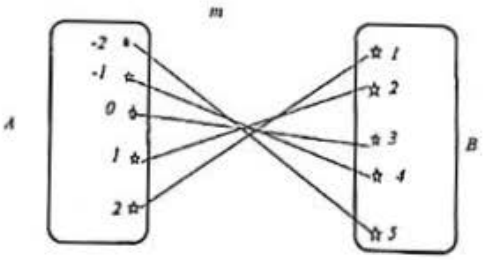












Exercice2

Dans chacun des cas suivants dire si l'application f est injective , surjective ou bijective.

1)) f est l'application de IN vers IN qui à tout entier naturel, on associe la somme de ses chiffres.

2)) $f : IR \times IR \to IR$;

$(x, y) \mapsto x + y$

3) $f : IR \to IR$

$x \mapsto 2x^2 - 1$

Scanné avec CamScanner

Exercice3

1) Soit $f : IR - \{1\} \to IR - \{1\}$

$x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$. a) Vérifier que f est une application.

b)) Montrer que f est bijective. c)) Donner l'application réciproque de f.

2) Soit l'application : $f : IR^* \to IR^*$

$x \mapsto \sqrt{x}$. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

3) Soit l'application $f :]-\infty;1] \to [2;+\infty[$

$x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$.

Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice4

On donne les applications :

$f : I \to [0;+\infty[$; $g : J \to IR^+$; $h : K \to IR^+$.

$x \mapsto f(x) = \sqrt{4-x}$; $x \mapsto g(x) = x^2$; $x \mapsto h(x) = |x|$ où I, J et K sont des intervalles de IR.

1) Déterminer I, J et K.
2) Déterminer les ensembles de départ de gof et hof et expliciter $gof(x)$ et $hof(x)$.

Scanné avec CamScanner

Chapitre 7: Limites de fonctions

I- OPÉRATIONS SUR LES LIMITES.

Soient f et g des fonctions et l et l' des réels. Soit « a » un réel pouvant être égal aussi à ($+\infty$) ou ($-\infty$)

1- LIMITE DE : $F+G$.

Si $\lim_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I	$-\infty$

2- LIMITE DE : F.G.

Si $\lim_{x\to a} f(x)$	l	$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim_{x\to a} g(x)$	l'	l'(l' #0)	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x\to a}(fg)(x)$	ll'	$+\infty$ si $(l' \succ 0)$ $-\infty$ si $(l' \prec 0)$	F.I	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

3- LIMITE DE : F/G.

Si $\lim_{x\to a} f(x)$	l	l	0	∞	∞
et $\lim_{x\to a} g(x)$	l'(l' #0)	$+\infty$ ou $-\infty$	0	l'(l' #0)	∞
alors $\lim_{x\to a}(\frac{f}{g})(x)$	$\frac{l}{l'}$	0	F.I	∞	F.I

NB : F.I (Forme Indéterminée)

II- PROPRIÉTÉS.

Propriété 1

La limite à l'infini d'un polynôme est égale à la limite à l'infini du monôme de plus haut degré.

Propriété 2

La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du rapport des monômes de plus haut degré.

Propriété 3

Soient f une fonction et a un réel. Si f est définie en a alors $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Propriété 4

Soient a et b deux réels pouvant être infinis. Si $\lim_{x\to a} g(x) = b$ alors $\lim_{x\to a}[fog(x)] = \lim_{x\to b} f(x)$.

Scanné avec CamScanner

III- LIMITES ET ORDRE.

Théorème 1 : f et u étant deux fonctions définies sur $]a;+\infty[$,

si pour x assez grand $f(x) \geq u(x)$ (respectivement $f(x) \leq u(x)$) et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$

(respectivement $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$) alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$)

Théorème 2 : f, u et v étant trois fonctions définies sur $]a;+\infty[$,

si pour x assez grand on a $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

Limites remarquables : 1) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$; 2) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Exercices

EXERCICE 1

1- Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$:

a) $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$; b) $f(x) = x - \sqrt{x}$; c) $f(x) = -3\sqrt{2}$; d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{1+x}$

2- Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$

a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, b) $f(x) = 5x^3 + x^2 - 40x + 123874$; c) $f(x) = -x\sqrt{2} + 1$

d) $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x+1}$; e) $f(x) = \frac{2x+3}{x\sqrt{2}-2}$; f) $f(x) = \frac{x+6}{4-x^2}$

g) $f(x) = \frac{4-5x}{2x+3}$; h) $f(x) = \frac{2(x-2)^2+1}{3-5x^3}$; i) $f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 2x - 11}{x^2 - 14x + 3}$

EXERCICE 2

Etudier la limite de f en a (on calculera éventuellement les limites à gauche et à droite de a)

a) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}; a = 1$; b) $f(x) = \frac{1-2x}{x+2}; a = -2$; c) $f(x) = \frac{-2}{(3-x)^2}; a = 3$

d) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}; a = 2$; e) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}; a = 2$; f) $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2}; a = 4$

g) $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - x - 6}; a = 3$; h) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}; a = 1$; i) $f(x) = \frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}; a = 2$

j) $f(x) = \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x}; a = 0$; k) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}; a = 1$; l) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}; a = 3$

m) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}; a = 0$.

EXERCICE 3

Calculer les limites de fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

a) $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 1} + x$; b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1} - x$

Scanné avec CamScanner

c) $f(x)=x+2+\sqrt{x^2-3x+1}$; d) $f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}$

e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{3x-1}$; f) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{4x^2+3}}$; g) $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2-3x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$

EXERCICE 4

Calculer les limites de fonction f en -∞ et en +∞.

a) $f(x)=x-\sin x$; b) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2+1}$; c) $f(x)=x\sqrt{1+\sin^2 x}$; d) $f(x)=\sqrt{x^2+\cos^2 x}$

e) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sin^2 x+2}$; f) $f(x)=\dfrac{x}{2-\sin(\frac{1}{x})}$; g) $f(x)=\dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$.

EXERCICE 5

1) Calculer la limite de f en 0.

a) $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{3x}$; b) $f(x)=\dfrac{\sin 4x}{5x}$; c) $f(x)=\dfrac{1-Cos4x}{4x^2}$

d) $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$; e) $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x}+\cos 2x$; f) $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$;

g) $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$; h) $f(x)=\dfrac{\tan 3x}{\tan 5x}$; i) $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x\cos x}$

2) Calculer:

a)) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}\right)$; b)) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2}\right)$.

EXERCICE 6

1- Soit h la fonction définie par $h(x)=-3x^3+5x-4$

a) Déterminer le domaine de définition Dh de h ; b) Calculer les limites de h aux bornes de Dh

2- Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$

a) Déterminer le domaine de définition Df de f ; b) Calculer les limites de f aux bornes de Df

3- Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{x+3}{4-x^2}$

a) Déterminer le domaine de définition Dg de g ; b) Calculer les limites de g aux bornes de Dg

Scanné avec CamScanner

Chapitre 8 : Dérivation

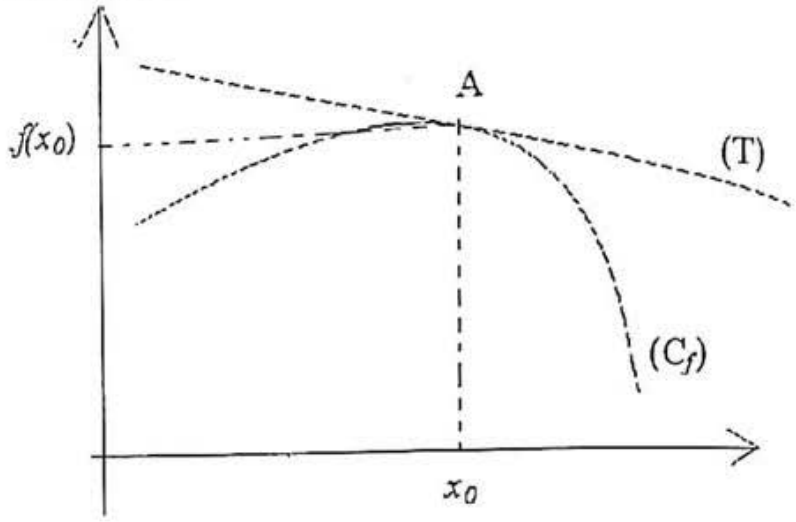
I- DÉRIVATION EN X_0.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en un point x_0 :

lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$ avec $l \in IR$

l est appelé le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$



Remarque

Le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point $A(x_0 ; f(x_0)$ est $f'(x_0)$.
L'équation de la tangente (T) est :
$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

II- DÉRIVÉE D'UNE FONCTION.

Définitions

On dit que f est dérivable sur un intervalle I de IR si f est dérivable en tout point de I.
La fonction qui à tout x de I, on associe $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f ou la dérivée de f. On la note f'.

Dérivées de quelques fonctions élémentaires

$f(x)$	D_f	f est dérivable sur	$f'(x)$
$k / k \in IR$	IR	IR	0
x	IR	IR	1
x^n avec $n \in IN^*$	IR	IR	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	IR^*	IR^*	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	IR'	IR^*	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$sinx$	IR	IR	$Cosx$
$cosx$	IR	IR	$-sinx$
$tanx$	$IR-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$	$IR-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$	$\dfrac{1}{cox^2x} = 1+\tan^2 x$

Scanné avec CamScanner

III- OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES.

Soient u et v deux fonctions dérivables.

$(u+v)' = u' + v'$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(u.v)' = u'v + uv'$	$\left[\dfrac{u}{v}\right]' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$(k.u)' = ku'$ avec $k \in IR$	$(\dfrac{1}{v})' = -\dfrac{v'}{v^2}$
$(u^2)' = 2u'u$; $(u^n)' = nu'u^{n-1}$	$(uov)' = (u'ov)v'$

III- DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION.

1- Sens de variation d'une fonction.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de IR.

f' est positive sur I si et seulement si f est croissante sur I.

f' est négative sur I si et seulement si f est décroissante sur I.

f' est nulle sur I si et seulement si f est constante sur I.

2- Extremums relatifs d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de IR et $x_0 \in I$.

$f(x_0)$ est un extremum relatif de la fonction f si et seulement si f' s'annule en x_0 en changeant de signe.

Exercices

EXERCICE 1

Donner l'expression de la dérivée de la fonction f dans chacun des cas :

1) $f(x) = x + 125$; 2) $f(x) = \sqrt{5}$; 3) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 11x - 1$

4) $f(x) = \dfrac{3}{4}x^4 + \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x - 3$; 5) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+3}$; 6) $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2}$

EXERCICE 2

Donner l'expression de la dérivée de la fonction f dans chacun des cas :

1) $f(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$; 2) $f(x) = (2x - \sqrt{x})^4$; 3) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x+1}}{x-2}$

4) $f(x) = x^2 + 1 + \sqrt{x}$; 5) $f(x) = (2x^2 - 1)^2(3x+1)^4$

EXERCICE 3

Donner l'expression de la dérivée de la fonction f dans chacun des cas :

1) $f(x) = \tan x$; 2) $f(x) = \cos x \sin^2 x$; 3) $f(x) = (\sin^4 x)\tan x$

4) $f(x) = \dfrac{1 - 3\cos 3x}{2 - \cos 3x}$; 5) $f(x) = \cos(2x - \dfrac{\pi}{3})$; 6) $f(x) = \sin(\dfrac{\pi}{4} - 3x)$

Scanné avec CamScanner

7) $f(x) = \sin^2 x + 3\cos x$; 8) $f(x) = \tan^2(\frac{\pi}{6} - 2x)$

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

1- Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites aux bornes du domaine de définition.
2- Calculer f'(x) et déterminer son signe.
3- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

EXERCICE 5

Soit a et b deux réels. On considère la fonction f définie par : $f(x) = ax + b + \frac{1}{3 - x}$

1- Calculer les réels a et b sachant que f(2) = 2 et f'(2) = 0
2-Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur IR-$\{2\}$ par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1- Déterminer a, b, c pour que (C) ait les propriétés suivantes :
   a) (C) passe par le point A (0,5).
   b) La tangente à (C) au point A est parallèle à l'axe des abscisses.
   c) La tangente à (C) au point B d'abscisse 1 a pour coefficient directeur -3.
2- Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3- Calculer f'(x) et étudier les variations de f.
4- Dresser le tableau de variation de f.

EXERCICE 7 :

Soit a, b deux nombres réels. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$

a) Calculer $f'(x)$

b) Déterminer a, b pour que la représentation graphique de f : Passe par A(O, 3) et admet en ce point A une tangente d'équation $y = 4x + 3$.

c) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

EXERCICE 8

On dispose d'une feuille de carton carré de côté 100cm. Aux quatre coins de cette feuille on découpe un carré de côté x cm puis on plie le morceau restant pour obtenir une boite sans couvercle. On désigne par $v(x)$ le volume de cette boîte, exprimé en cm^3.

a) Préciser l'ensemble de valeurs possibles x. b) Démontrer que $v(x) = x(100 - 2x)^2$

Etudier le sens de variation de la fonction V ainsi obtenue et dresser son tableau de variation.

Calculer le volume maximum.

EXERCICE 9

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin^2 x + \cos x$

1- Montrer que $f'(x) = 2\sin x(\cos x - \frac{1}{2})$

2- Etudier les variations de f sur [0 ;Π]

3- Dresser le tableau de variation de f sur [0 ;Π].

Scanné avec CamScanner

Chapitre 9 : Etude de fonctions

I- PARITÉ ET PÉRIODICITÉ.

1- FONCTIONS PAIRES.

Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition Df. On dit que est paire si :

Pour tout $x \in Df ; -x \in Df \quad f(-x) = f(x)$

Remarque : Si f est paire alors la courbe (C) de f admet (Oy) comme axe de symétrie.

2- FONCTIONS IMPAIRES.

Soit f une fonction d'ensemble de définition Df. On dit que est impaire si :

Pour tout $x \in Df ; -x \in Df \quad f(-x) = -f(x)$

Remarque : Si f est impaire alors la courbe (C) de f admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

3- FONCTIONS PÉRIODIQUES.

Soit f une fonction d'ensemble de définition Df et T un réel non nul.

On dit que f est périodique, de période T, si pour tout $x \in Df$, $(x-T) \in Df$, $(x+T) \in Df$ et $f(x+T) = f(x)$

Remarque : f est périodique de période T, si sa courbe est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$

II- ELÉMENTS DE SYMÉTRIE.

1- AXE DE SYMÉTRIE.

Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition Df, C sa courbe représentative et $(D) : x = a$.

C admet $(D) : x = a$ comme axe de symétrie si : $x \in Df$; $(2a-x) \in Df \quad f(2a-x) = f(x)$

2- CENTRE DE SYMÉTRIE.

Soit f une fonction d'ensemble de définition Df, C sa courbe représentative et A(a ;b).

C admet $A(a ; b)$ comme centre de symétrie si : $x \in Df$; $(2a-x) \in Df \quad f(x) + f(2a-x) = 2b$

III- ASYMPTOTES.

1- ASYMPTOTES PARALLÈLES À L'AXE DES ABSCISSES (OX).

Soit f une fonction et C sa courbe représentative.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ alors la droite (D) : $y = b$ est une asymptote horizontale à C au voisinage de $+\infty$

Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ alors la droite (D) : $y = b$ est une asymptote horizontale à C au voisinage de $-\infty$

2- ASYMPTOTES PARALLÈLES À L'AXE DES ORDONNÉES (OY).

Soit f une fonction, C sa courbe représentative et a un réel.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ alors la droite (D) : $x = a$ est une asymptote verticale à C.

3- ASYMPTOTES OBLIQUES.

Soit f une fonction de courbe C et (D) : $y = ax + b$

Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ alors (D) : $y = ax + b$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ alors (D) : $y = ax + b$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$.

Scanné avec CamScanner

PLAN D'ÉTUDE D'UNE FONCTION.

Pour étudier une fonction, il faut :

1- déterminer son domaine de définition

2- calculer les limites aux bornes du domaine de définition et déduire l'existence d'asymptotes obliques et verticales.

3- déterminer la dérivée f' de f

4- déterminer le signe de f' et étudier les variations de f

5- Dresser le tableau de variation de f. 6- tracer la courbe

Problèmes

PROBLÈME1

Soit f une fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$

1- Déterminer le domaine de définition D de f.

2- Calculer les limites de f aux bornes de D. Déduire l'existence d'une asymptote.

3- Calculer f'(x).

4- Etudier les variations de f.

5- Dresser le tableau de variation de f.

6- Déterminer l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.

7- Tracer dans un repère orthonormé (T) et la courbe (C) de f.

PROBLÈME2

Le graphique ci-dessous donne la courbe C représentative d'une fonction f sur]-3, + ∞[, ainsi que les tracés de ses asymptotes et d'une tangente T.

Répondre aux questions suivantes en utilisant le graphique

1-Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse -2

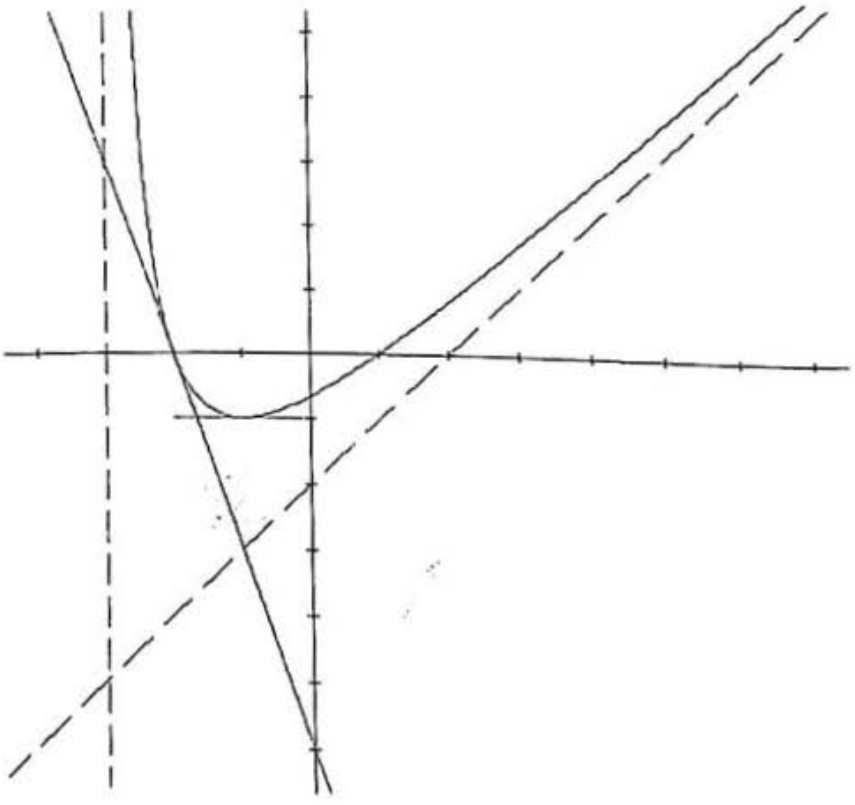
2-Quelle limite de f en + ∞ le graphique laisse t'il prévoir ?

3-Déterminer les équations des éventuelles asymptotes à C.

4-Etudier les positions relatives de C par rapport à l'asymptote oblique.

Dresser le tableau de variations de f.

6-Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.



PROBLÈME3

La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 3}$ et C sa courbe représentative.

1. Déterminer le domaine de définition Df de f, déterminer les limites de f aux bornes de Df et déduire l'existence d'une asymptote (Δ).

Scanné avec CamScanner

2. Montrer que la dérivée de f est : $f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 5}{(x+3)^2} = \frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}$ et dresser le tableau de variation de f.

3. Démontrer que la droite D d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe C et étudier les positions relatives de C par rapport à D.

. Déterminer les points d'intersection de C avec les axes des coordonnées.

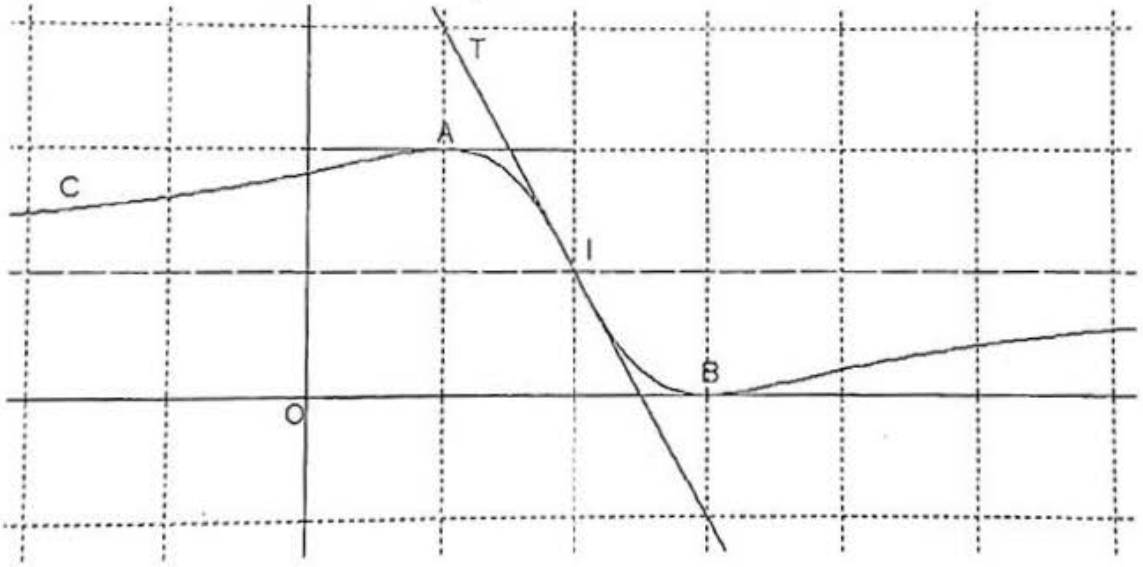
5. Déterminer l'équation de la tangente (T) à C au point d'abscisse 2.

6. Montrer que le point de concours des asymptotes est un centre de symétrie pour C

7. Tracer D, Δ, T, C dans un repère orthonormé (Unité : 1cm).

PROBLÈME 4

Le graphique ci-dessous donne la courbe C représentative d'une fonction f sur $\mathfrak{R}$, ainsi que les tracés de l'asymptote et d'une tangente T (unités : 2 cm).



A. Répondre aux questions suivantes en utilisant le graphique

1- Quel est le coefficient directeur de la de la tangente T au point I d'abscisse $x = 2$?

Quelle est l'équation de cette tangente ?

2- Quelles limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ le graphique laisse t'il prévoir ?

B. Soit la fonction $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2 - 4x + 5}$ définie sur $\mathfrak{R}$.

1. Etudier les limites de f aux bornes du domaine.

La dérivée de f est : $f'(x) = \frac{2(x^2 - 4x + 3)}{(x^2 - 4x + 5)^2} = \frac{2(x-1)(x-3)}{(x^2 - 4x + 5)^2}$; Etudier le signe de f'.

2. Dresser le tableau de variations de f.

PROBLÈME 5

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{2x+2}{x^2 + 2x - 3}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$ orthonormé d'unité 1cm.

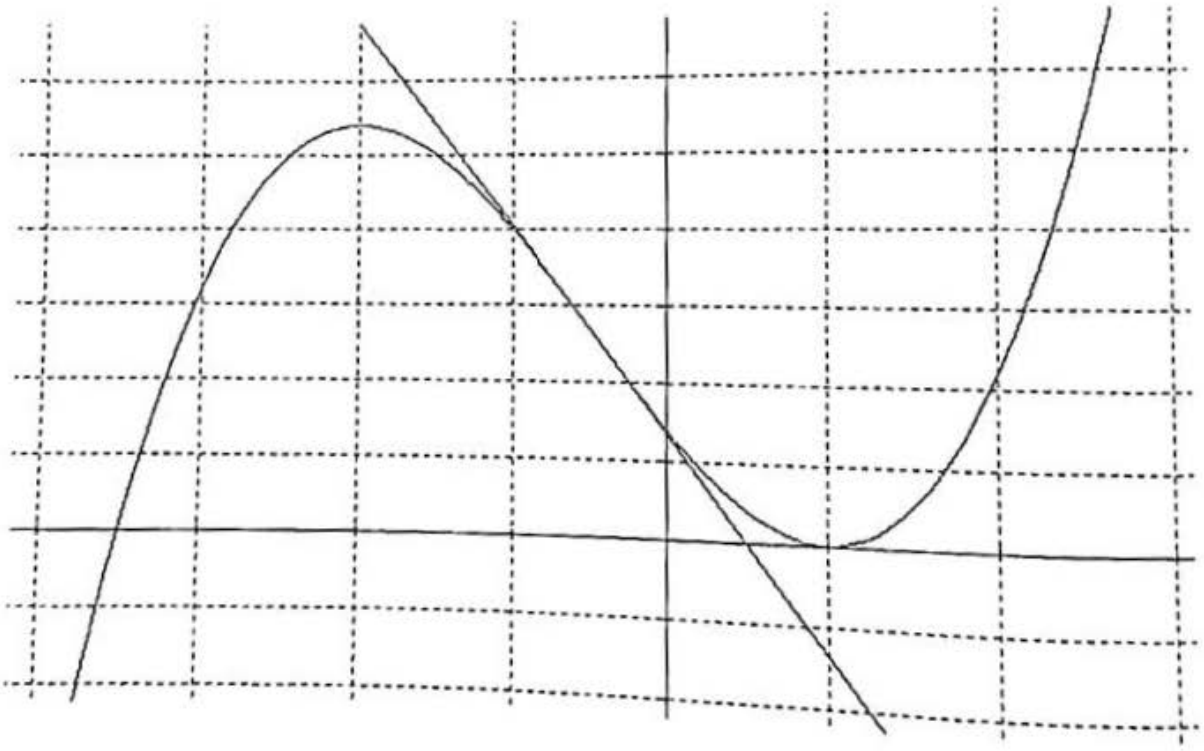
Scanné avec CamScanner

1- Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limités aux bornes.
2- Donner la nature et l'équation de chacune des asymptotes à (C). 3- Calculer $f'(x)$.
4- a- Déterminer les points d'intersections A et B de (C) avec axes de coordonnées.
b- Donner une équation de la tangente au point d'intersection avec l'axe des abscisses.
5-Dresser le tableau de variation de f. Construire la courbe (C) dans $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
6- Etudier suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solution de $f(x) = m$.

PROBLÈME 6

Le graphique ci-dessous donne la courbe C représentative d'une fonction f sur $\mathbf{R}$, ainsi que le tracé d'une tangente T (unités : 2 cm sur Ox ; 1 cm sur Oy).

A. Répondre aux questions suivantes en utilisant le graphique (Page suivante)
1- Quelles limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ le graphique laisse t'il prévoir ?
2- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$.



B. La fonction f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$.
Calculer et étudier le signe de la fonction dérivée f' ?
Dresser le tableau de variation de f.

PROBLÈME 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x + \sqrt{x^2+1}$. Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1- Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2- Calculer les limites de f aux bornes de D.
3- Démontrer que la droite (D1) : $y = x$ est une asymptote à C au voisinage de $-\infty$ et que (D2) : $y = 3x$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$
4- Calculer f'(x), étudier son signe et déduire les variations de f.
5- Dresser le tableau de variation de f.

Scanné avec CamScanner

6- Déterminer l'équation de tangente (T) à C au point d'abscisse 0.
7- Tracer dans le même repère (D1), (D2) , (T) et C.

PROBLÈME 8

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$

1- Déterminer le domaine de définition D de f.
2- Montrer que f est impaire.
3- Montrer que f est périodique de période 2π
4- Montrer que $f'(x) = \dfrac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$
5- Etudier les variations de f sur $[-\Pi;\Pi]$ et dresser le tableau de variation de f.
6- Représenter la courbe C de f dans un repère orthogonal pour $x \in [-3\Pi;3\Pi]$

PROBLÈMES NON RÉSOLUS

Problème1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x+2}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition et déduire l'existence d'une asymptote.
2) Déterminer $f'(x)$. Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f.
3) Vérifier que pour tout x de D_f, on a : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x+2}$.
4) Montrer que la droite $(D): y = x - 1$ est une asymptote à C.
5) Déterminer les positions relatives de C et (D).
6) Déterminer les points d'intersection de C avec les axes des coordonnées.
7) Déterminer l'équation de la tangente (T) à C au point d'abscisse -1.
8) Déterminer les coordonnées du point H d'intersection des deux(2) asymptotes et montrer que H est un centre de symétrie de C.
9) Tracer dans le repère (T) ainsi que la courbe C.
10) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ *avec* $m \in IR$.

Problème2

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x^3-5x}{x^2+3}$. On note (C) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1) Déterminer le domaine de définition D de g et calculer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.
2) Etudier la parité de g et donner une interprétation géométrique.

Scanné avec CamScanner

3) a) Vérifier que pour x de D, $g(x) = x - \frac{8x}{x^2+3}$.

b) Montrer que la droite $(D): y = x$ est asymptote à (C) au voisinage de l'infini.

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3) a) Calculer $g'(x)$ et vérifier que $g'(x) = \frac{(x^2-1)(x^2+15)}{(x^2+3)^2}$.

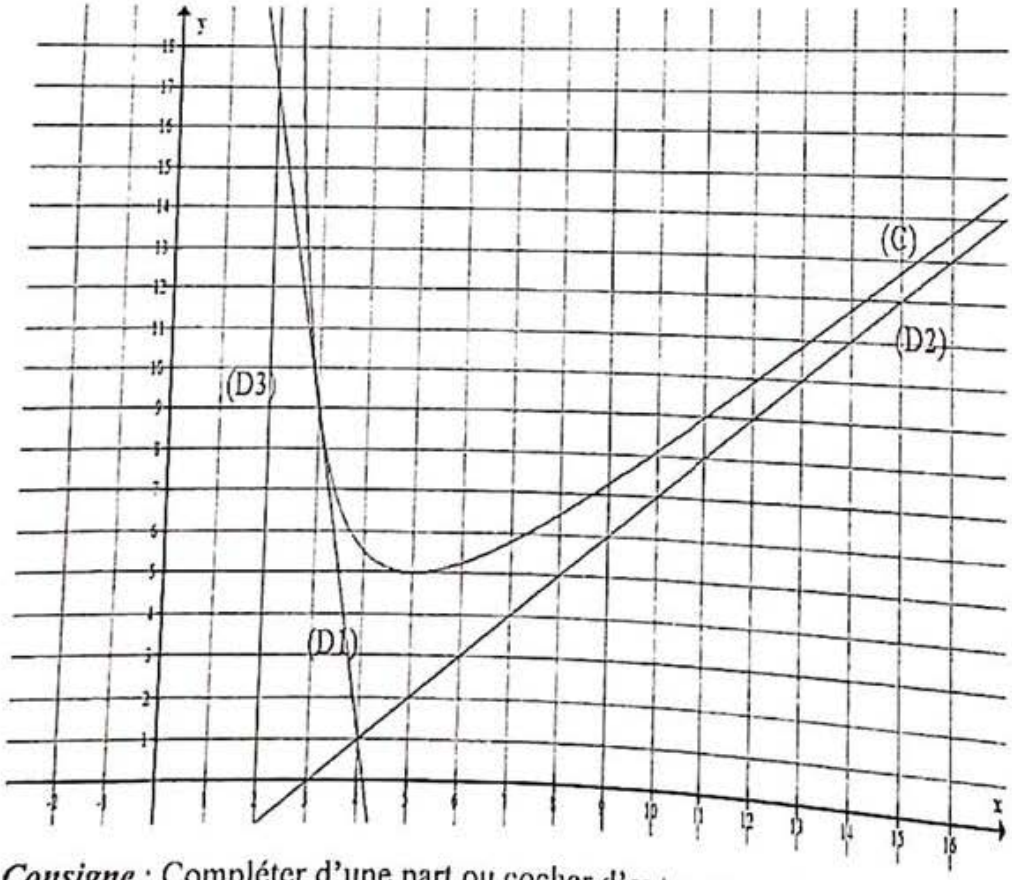
b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

4) Tracer (D), (T) et (C).

problème3

On a la représentation graphique (C) de la fonction f dans un repère orthogonal.



Consigne : Compléter d'une part ou cocher d'autre part la bonne réponse

1)) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ .....

2)) $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) =$ .....

3)) $f(11) =$ .....

4) $f'(5) =$ .....

5)) L'équation de la tangente (D1) à (C) au point d'abscisse 3 est : $y =$ .....

6)) $f'(3) =$ .....

Scanné avec CamScanner

7)) L'asymptote (D2) à la courbe (C) a pour équation : y = ...

8)) Pour $x \geq 5$: ⊡ $f'(x) < 0$; ⊡ $f'(x) \geq 0$; ⊡ $f'(x) > 0$; ⊡ $f'(x) \leq 0$

9)) Pour $x \in]2;4[$: ⊡ $f'(x) < 0$; ⊡ $f'(x) \geq 0$; ⊡ $f'(x) > 0$; ⊡ $f'(x) \leq 0$

10)) L'équation $f(x) = 5$ admet : ⊡ 0 solution ; ⊡ 1 solution ; ⊡ 2 solutions

Problème4

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \cos^2 x - \sin x + 1$. On note (C) sa courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1- Vérifier que f est périodique de période 2π

2- Montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour (C)

3- Calculer $f'(x)$, étudier le signe de $f'(x)$ sur $I = [-\pi;\pi]$ et déduire les variations de f sur I

4- Dresser le tableau de variations de f

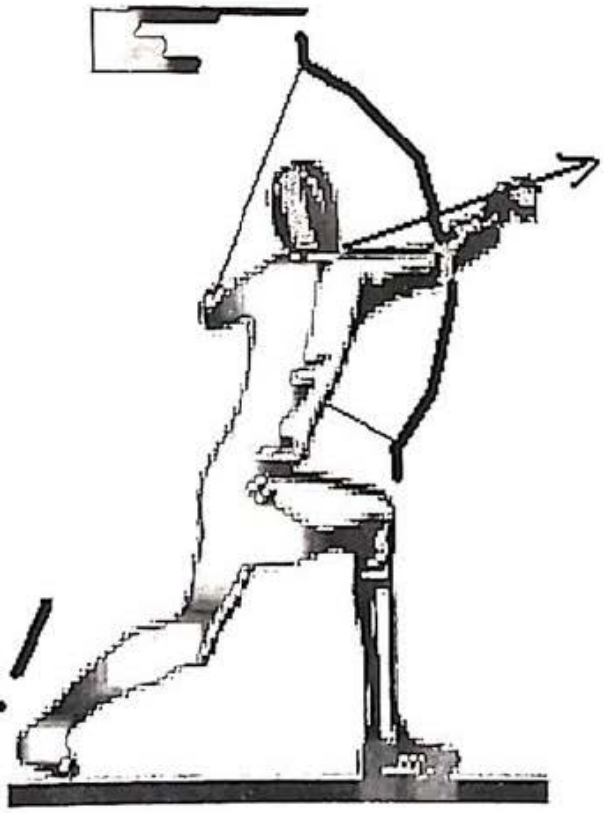
5- Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes du repère sur I

On rappelle que : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Scanné avec CamScanner

Scanné avec CamScanner

Corrigés des exercices



Tirez !!!

Scanné avec CamScanner

Correction des Exercices du chapitre I

Exercice1

1- Donnons la forme canonique de g(x) et de f(x) :

$g(x)=x^2\sqrt{2}+\frac{1}{3}x-\sqrt{3}$

a) $g(x)=\sqrt{2}(x^2+\frac{1}{3\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$

$g(x)=\sqrt{2}\left[(x+\frac{1}{6\sqrt{2}})^2-(\frac{1}{6\sqrt{2}})^2-\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

$g(x)=\sqrt{2}\left[(x+\frac{1}{6\sqrt{2}})^2-\frac{1}{72}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

$g(x)=\sqrt{2}\left[(x+\frac{1}{6\sqrt{2}})^2-\frac{1+36\sqrt{6}}{72}\right]$

$f(x)=\frac{-2}{3}x^2+4x-12$

b) $f(x)=-\frac{2}{3}(x^2-6x+18)$

$f(x)=-\frac{2}{3}\left[(x-3)^2-9+18\right]$

$f(x)=-\frac{2}{3}\left[(x-3)^2+9\right]$

2- $(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2=12-2\sqrt{35}$; Résolvons $x^2-(\sqrt{5}+\sqrt{7})x+\sqrt{35}=0$

Calculons Δ et les racines x_1 et x_2.

$\Delta=(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2-4\sqrt{35}$

$\Delta=12-2\sqrt{35}$

$\Delta=(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{7}-\sqrt{5}$

$x_1=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{7})-(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{2}$

$x_1=\sqrt{5}$

$x_2=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{7})+(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{2}$

$x_2=\sqrt{7}$

. $S=\{\sqrt{7};\sqrt{5}\}$.

3- Résoudre dans IR ; $(x^2+x)^2+2(x^2+x)-8=0$; Posons $X=x^2+x$

Résolvons l'équation $X^2+2X-8=0$; $\Delta=4-4(-8)=6^2$ $X=\frac{-2-6}{2}=-4$ ou $X=\frac{-2+6}{2}=2$

On a donc $x^2+x=-4$ ou $x^2+x=2$

$x^2+x=-4 \Rightarrow x^2+x+4=0$; on a $\Delta=1-4(4)=-15$ donc $x^2+x+4=0$ n'a pas de solution dans IR

$x^2+x=2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-2=0 \Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2-(\frac{3}{2})^2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0$

d'où $x=-2$ ou $x=1$. Conclusion : $(x^2+x)^2+2(x^2+x)-8=0$ a pour solution : . $S=\{1;-2\}$.

4- $f(x)=x^3-bx^2+cx+1$ est factorisable par $g(x)=-2(x+1)(x-1)$ veut dire que 1 et -1 sont des racines de f donc $f(1)=0$ et $f(-1)=0$. Alors : $f(-1)=-b-c$ et $f(1)=-b+c+2$.

Déterminer b et c revient à résoudre le système suivant :

$\begin{cases}-b-c=0 & (1)\\ -b+c=-2 & (2)\end{cases}$ on trouve $b=1$ et $c=-1$; On a donc $f(x)=x^3-x^2-x+1$

Scanné avec CamScanner

Exercice2

$P(x) = 2x^3-x^2-x-3$

1- Vérifions que $\frac{3}{2}$ est une racine de p

$p(\frac{3}{2}) = 2(\frac{3}{2})^3 - (\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2}) - 3$

$p(\frac{3}{2}) = \frac{54}{8} - \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 3$

$p(\frac{3}{2}) = \frac{54-18-12-24}{8}$

$p(\frac{3}{2}) = 0$

.....=>

donc est $\frac{3}{2}$ une racine de p.

:

2- Résoudre $p(x) = 0$. Par identification ou par division euclidienne, on trouve :

$p(x) = (x-\frac{3}{2})(2x^2+2x+2)$; $p(x) = 0 \Rightarrow x-\frac{3}{2} = 0 ou 2x^2+2x+2 = 0$

$x-\frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$; $2x^2+2x+2 = 0$ on a $\Delta = 2^2-4(2)(2) = -12$ donc : $\boxed{S = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$

3- Résolvons $p(x) \leq 0$ $p(x) \leq 0 \Rightarrow \frac{2x^3-x^2-x-3}{x^2-3x+2} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-\frac{3}{2})(2x^2+2x+2)}{(x-2)(x-1)} \leq 0$

D'abord l'inéquation existe si $(x-2)(x-1) \neq 0$; $(x-2)(x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 et x \neq 1$

Faisons un tableau de signe de $p(x)$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$x-\frac{3}{2}$	-		-		0	+			+
$2x^2+2x+2$	+		+			+			+
$x-1$	-		0	+		+			+
$x-2$	-			-		-	0		+
$P(x)$	-	‖	‖	+	0	-	‖	‖	+

$\boxed{S =]-\infty;-1[\cup \left[\frac{3}{2};2\right[}$

Exercice3

$P(x) = 20x^3-5x^2-3x+5$ Si a, b et c sont des racines de p on a alors : $p(x) = 20(x-a)(x-b)(x-c)$

Développons, déduisons et ordonnons $p(x) = 20(x-a)(x-b)(x-c)$;

$p(x) = 20(x-a)(x-b)(x-c)$

$p(x) = 20x^3 - 20(a+b+c)x^2 + 20(ab+ac+bc)x - 20abc$

$P(x) = 20x^3 - 5x^2 - 3x + 5$ Par identification on a :

(1) : $20(a+b+c) = -5$; (2) : $20(ab+ac+bc) = -3$; (3) : $-20abc = 5$

(1) $-20(a+b+c) = -5 \Rightarrow a+b+c = \frac{1}{4}$ (3) : $-20abc = 5 \Rightarrow abc = -\frac{1}{4}$

Scanné avec CamScanner

De (3) et (2), si on fait $\frac{(2)}{(3)}$, on a :

$$\frac{20(ab+ac+bc)}{-20abc}=\frac{-3}{5}\Rightarrow\frac{ab+ac+bc}{abc}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{ab}{abc}+\frac{ac}{abc}+\frac{bc}{abc}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{3}{5}$$

Exercice 4

On donne $p(x)=x^4-5x^3+6x^2-5x+1$

1- Montrons que $p(x)=x^2\left[(x+\frac{1}{x})^2-5(x+\frac{1}{x})+4\right]$ avec $x\neq 0$ Développons $x^2\left[(x+\frac{1}{x})^2-5(x+\frac{1}{x})+4\right]$

$$x^2\left[(x+\frac{1}{x})^2-5(x+\frac{1}{x})+4\right]=x^2\left[x^2+\frac{1}{x^2}+2-5x-\frac{5}{x}+4\right]=x^4-5x^3+6x^2-5x+1$$

$$x^2\left[(x+\frac{1}{x})^2-5(x+\frac{1}{x})+4\right]=p(x)$$

2- Résoudre dans IR $p(x)=0$ $P(x)=0\Rightarrow x^2\left[(x+\frac{1}{x})^2-5(x+\frac{1}{x})+4\right]\Rightarrow\left[(x+\frac{1}{x})^2-5(x+\frac{1}{x})+4\right]=0$

Posons $X=x+\frac{1}{x}$ et résolvons ainsi $x^2-5x+4=0$

$X^2-5X+4=0\Rightarrow(X-4)(X-1)=0\Rightarrow$ $X=4$ ou $X=1$.

$X=4\Rightarrow x+\frac{1}{x}=4\Rightarrow x^2-4x+1=0$; $\Delta=4^2-4=12=(2\sqrt{3})^2$ On a : $x_1=2+\sqrt{3}$ et $x_2=2-\sqrt{3}$

$X=1\Rightarrow x+\frac{1}{x}=1\Rightarrow x^2-x+1=0$; $\Delta=1-4=-3$; $\Delta<0$ Donc : $S=\{2+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\}$

Résolvons $p(x)\geq 0$: $P(x)=(x^2-4x+1)(x^2-x+1)=(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})(x^2-x+1)$

Dressons le tableau de signe de p(x) :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$	+		0	-	0	+	
x^2-x+1	+		+		+		
$P(x)$	+		0	-	0	+	

$S=]-\infty;2-\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{3};+\infty[$

Exercice 5

ABCD est un rectangle tel que BC = AB + 1 et AC = 2AB

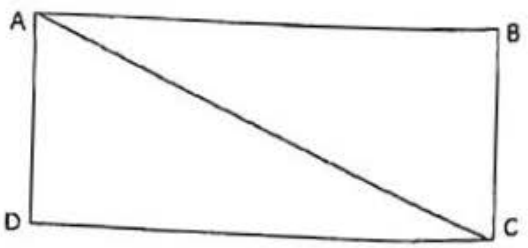
Posons AB = x ; on a BC = $x+1$ et AC = $2x$

Calculons x.

ABC est un triangle rectangle en B ; on a :

$AB^2+BC^2=AC^2$ signifie que $x^2+(x+1)^2=(2x)^2$.

$x^2+(x+1)^2=4x^2\Rightarrow 2x^2-2x-1=0$



Scanné avec CamScanner

$\Delta = 4 - 4(2)(-1) = 12$; $x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ donc AB = $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ car $x_2 \prec 0$

Calculons la surface S de ABCD : $S = AB.BC \Rightarrow S = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$; $\boxed{S = \frac{3+2\sqrt{3}}{2}}$.

Exercice 6

1- Si (-1) est une solution de $(2m-1)x^2-2mx+5=0$ alors : $(2m-1)(-1)^2-2m(-1)+5=0 \Rightarrow 4m+4=0$
$\Rightarrow m = -1$

2- Déterminons m pour que $mx^2+2mx+1$ ait une racine double.
Pour que $mx^2+2mx+1$ ait une racine double il faut que : $m \neq 0$ et $(2m)^2-4m=0$
$(2m)^2-4m=0 \Rightarrow 4m^2-4m=0 \Rightarrow 4m(m-1)=0 \Rightarrow m=1$

3- Déterminons les valeurs de m pour que $(m-1)x^2+2mx+m-4$ ait deux racines de signes contraires.
Posons $\Delta = (2m)^2-4(m-1)(m-4) = 20m-16$
Pour que $(m-1)x^2+2mx+m-4$ ait deux racines de signes contraires il faut que :

$m-1 \neq 0$; $\Delta > 0$ et $x_1.x_2 < 0$ avec $x_1 = \frac{-2m-\sqrt{\Delta}}{2(m-1)}$ et $x_2 = \frac{-2m+\sqrt{\Delta}}{2(m-1)}$

$$x_1x_2 = \frac{4m^2-\Delta}{4(m-1)^2} = \frac{4m^2-20m+16}{4(m-1)^2} = \frac{m^2-5m+4}{(m-1)^2} = \frac{(m-1)(m-4)}{(m-1)^2}$$

* $m-1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$

* $\Delta \succ 0 \Rightarrow 20m-16 \succ 0 \Rightarrow m \succ \frac{4}{5} \Rightarrow m \in \left]\frac{4}{5};+\infty\right[$

* $x_1x_2 \prec 0 \Rightarrow (m-4)(m-1) \prec 0 \Rightarrow m \in]1;4[$ Conclusion : $\boxed{m \in \left]\frac{4}{5};+\infty\right[\cap]1;4[\Rightarrow m \in]1;4[}$.

Exercice 7

$P(x) = x^2+(2m+1)x+m^2+1$; on a: $\Delta = (2m+1)^2-4(m^2+1) = 4m-3$

Pour que p ait deux racines x_1 et x_2, il faut que: $\Delta \succ 0 \Rightarrow 4m-3 \succ 0 \Rightarrow m \succ \frac{3}{4} \Rightarrow m \in \left]\frac{3}{4};+\infty\right[$

Prenons $x_1 = \frac{-(2m+1)-\sqrt{4m-3}}{2}$ et $x_2 = \frac{-(2m+1)+\sqrt{4m-3}}{2}$

a) Déterminons les valeurs du nombre m pour que : $x_1^2+x_2^2 = 29 \Rightarrow$

$$\frac{(2m+1)^2+(4m-3)+2(2m+1)\sqrt{4m-3}}{4} + \frac{(2m+1)^2+(4m-3)-2(2m+1)(\sqrt{4m-3}}{4} = 29$$

$$\Rightarrow \frac{2(2m+1)^2+2(4m-3)}{4} = 29 \Rightarrow \frac{(2m+1)^2+4m-3}{2} = 29 \Rightarrow 4m^2+8m-2 = 58$$

$$\Rightarrow 4m^2+8m-60 = 0 \Rightarrow m^2+2m-15 = 0 \Rightarrow (m-3)(m+5) = 0 \Rightarrow m = 3 ou m = -5$$

$-5 \notin \left]\frac{3}{4};+\infty\right[$; $3 \in \left]\frac{3}{4};+\infty\right[$ donc $m = 3$

Déduisons les valeurs de x_1 et x_2.

$x_1 = \frac{-(2\times 3+1)-\sqrt{4\times 3-3}}{2} = -5$ et $x_2 = \frac{-(2\times 3+1)+\sqrt{4\times 3-3}}{2} = -2$

Scanné avec CamScanner

b) Déterminons les valeurs du nombre m pour que $|x_1 + x_2| = 3$; On a : $x_1 + x_2 = -2m-1$.

Résolvons $|x_1 + x_2| = 3$

$$|x_1 + x_2| = 3 \Rightarrow |-2m-1| = 3 \Rightarrow -2m-1 = 3 ou -2m-1 = -3 \Rightarrow m = -2 oum = 1$$

$-2 \notin \left]\frac{3}{4};+\infty\right[$; $1 \in \left]\frac{3}{4};+\infty\right[$ donc : $\boxed{. m = 1 .}$

Déduisons les valeurs de x_1 et x_2.

$$\boxed{. x_1 = \frac{-(2\times 1+1)-\sqrt{4\times 1-3}}{2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-(2\times 1+1)+\sqrt{4\times 1-3}}{2} = -1 .}$$

Chapitre 2 : Equations

Exercice1

Résoudre dans IR : a) $\sqrt{3x+7} = x+1$ $\sqrt{3x+7} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ et \\ 3x+7 = (x+1)^2 \end{cases}$

* $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow x \in [-1;+\infty[$

* $(x+1)^2 = 3x+7 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 3 oux = -2$

$-2 \notin [-1;+\infty[$; $3 \in [-1;+\infty[$ donc $\boxed{. S = \{3\} .}$

b) $x+1-\sqrt{4x-15} = 4$; $x+1-\sqrt{4x-15} = 4 \Rightarrow \sqrt{4x-15} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ et \\ 4x-15 = (x-3)^2 \end{cases}$

* $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow x \in [3;+\infty[$

* $(x-3)^2 = 4x-15 \Rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$; $\Delta = 10^2 - 4(24) = 4 = 2^2$;

$x_1 = \frac{10-2}{2} = 4 et x_2 = \frac{10+2}{2} = 6$; $4 \in [3;+\infty[$ et $6 \in [4;+\infty[$ donc $\boxed{. S = \{4;6\} .}$

c) $\sqrt{4-x^2} = x-1$: $\sqrt{4-x^2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ et \\ 4-x^2 = (x-1)^2 \end{cases}$

* $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x \in [1;+\infty[$

* $4-x^2 = (x-1)^2 \Rightarrow 4-x^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = 4 - 4(2)(-3) = 28 = (2\sqrt{7})^2$; $x_1 = \frac{2+2\sqrt{7}}{4} = \frac{1+\sqrt{7}}{2} et x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$

$x_1 \in [1;+\infty[$; $x_2 \notin [1;+\infty[$ donc $\boxed{. S = \{\frac{1+\sqrt{7}}{2}\}}$

Scanné avec CamScanner

exercice2

Résolvons dans IR : a) $\sqrt{2-x^2}=\sqrt{x^2-1}$: $\sqrt{2-x^2}=\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-1\geq 0\\2-x^2=x^2-1\end{cases}$

* $x^2-1\geq 0\Rightarrow(x-1)(x+1)\geq 0\Rightarrow x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$

* $2-x^2=x^2-1\Rightarrow 2x^2-3=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{6}}{2}\,ou\,x=-\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\frac{\sqrt{6}}{2}\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$; $-\frac{\sqrt{6}}{2}\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$ donc : $\boxed{.\ S=\{\frac{\sqrt{6}}{2};-\frac{\sqrt{6}}{2}\}\ .}$

b) $\sqrt{2x^2+5x-7}=\sqrt{x^2-x-2}$; $\sqrt{2x^2+5x-7}=\sqrt{x^2-x-2}\Rightarrow\begin{cases}2x^2+5x-7\geq 0\\2x^2+5x-7=x^2-x-2\end{cases}$

* $2x^2+5x-7\geq 0$; $\Delta=25-4(2)(-7)=81=9^2$; $x_1=\frac{-5-9}{4}=-\frac{7}{2}\,et\,x_2=\frac{-5+9}{4}=1$

$2x^2+5x-7\geq 0\Rightarrow x\in\left]-\infty;-\frac{7}{2}\right]\cup\left[1;+\infty\right[$

* $2x^2+5x-7=x^2-x-2\Rightarrow x^2+6x-5=0$; $\Delta=6^2-4(-5)=56=(2\sqrt{14})^2$

$x_1=\frac{-6-2\sqrt{14}}{2}=-3-\sqrt{14}\ et\ x_2=\frac{-6+2\sqrt{14}}{2}=-3+\sqrt{14}$

$x_1\in\left]-\infty;-\frac{7}{2}\right]\cup\left[1;+\infty\right[$ mais : $x_2\notin\left]-\infty;-\frac{7}{2}\right]\cup\left[1;+\infty\right[$ donc : $\boxed{.\ S=\ =\{-3-\sqrt{14}\}}$

c) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-12}=\sqrt{x+12}$

$\sqrt{x+3}+\sqrt{x-12}=\sqrt{x+12}\begin{cases}x+3\geq 0\,et\,x-12\geq 0\,et\,x+12\geq 0\\et\\\left[\sqrt{x+3}+\sqrt{x-12}\right]^2=x+12\end{cases}$

* $x+3\geq 0\,et\,x-12\geq 0\,et\,x+12\geq 0\Rightarrow x\in\left[12;+\infty\right[$

* $\left[\sqrt{x+3}+\sqrt{x-12}\right]^2=x+12\Rightarrow(x+3)+(x-12)+2\sqrt{(x+3)(x-12)}=x+12$

$\Rightarrow 2\sqrt{(x+3)(x-12)}=21-x\Rightarrow 4(x+3)(x-12)=(21-x)^2\Rightarrow 3x^2+6x-585=0$;

$\Delta=6^2-4(3)(-585)=7056=84^2$, $x_1=\frac{-6-84}{6}=-15;x_2=\frac{-6+84}{6}=13$

$-15\notin\left[12;+\infty\right[$; $13\in\left[12;+\infty\right[$ d'où : $\boxed{.\ S=\{13\}\ .}$

d) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}=1$: $\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}=1\Leftrightarrow\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+1\geq 0\,et\\2x-1\geq 0\\2x+1=(1+\sqrt{2x-1})^2\end{cases}$

Scanné avec CamScanner

* $2x+1\geq 0 et 2x-1\geq 0 \Rightarrow x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

* $2x+1=(1+\sqrt{2x-1})^2 \Rightarrow 2x+1=1+2x-1+2\sqrt{2x-1} \Rightarrow 2\sqrt{2x-1}=1 \Rightarrow (2\sqrt{2x-1})^2=1 \Rightarrow x=\frac{5}{8}$

$\frac{5}{8}\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ d'où : $\boxed{\therefore S=\{\frac{5}{8}\}}$.

Inéquations

Exercice3

Résolvons dans IR les inéquations suivantes : a) $\sqrt{4x^2-1}+4x\leq 0$

$$\sqrt{4x^2-1}+4x\leq 0 \Rightarrow \sqrt{4x^2-1}\leq -4x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-1\geq 0 et \\ -4x\geq 0 et \\ 4x^2-1\leq 16x^2 \end{cases}$$

* $4x^2-1\geq 0 \Rightarrow (2x-1)(2x+1)\geq 0; S_1=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

* $-4x\geq 0 \Rightarrow x\leq 0; S_2=\left]-\infty;0\right]$

* $4x^2-1\leq 16x^2 \Rightarrow -12x^2-1\leq 0$ Vrai : $S_3=IR \Rightarrow$. $S=S_1\cap S_2\cap S_3=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

b) $\sqrt{x^2-4}\prec x+3$: $\sqrt{x^2-4}\prec x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4\geq 0 et \\ x+3\geq 0 et \\ x^2-4\prec (x+3)^2 \end{cases}$

* $x^2-4\geq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2)\geq 0;; S_1=\left]-\infty;-2\right]\cup[2,+\infty[$

* $x+3\geq 0 \Rightarrow x\geq -3; S_2=[-3;+\infty[$

* $x^2-4\prec (x+3)^2 \Rightarrow x^2-4\prec x^2+6x+9 \Rightarrow -6x-13\prec 0 \Rightarrow x\succ -\frac{13}{6}; S_3=\left]-\frac{13}{6};+\infty\right[$

$$\boxed{\therefore S=S_1\cap S_2\cap S_3=\left]-\frac{13}{6};-2\right]\cup[2;+\infty[}.$$

c) $\sqrt{3-2x}\leq x+2$: $\sqrt{3-2x}\leq x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x\geq 0 et \\ x+2\geq 0 et \\ 3-2x\leq (x+2)^2 \end{cases}$

* $3-2x\geq 0 \Rightarrow x\leq \frac{3}{2} \Rightarrow S_1=\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$

* $x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -2 \Rightarrow S_2=[-2;+\infty[$

* $3-2x\leq (x+2)^2 \Rightarrow x^2+6x+1\geq 0$; $\Delta=6^2-4(1)=32=(4\sqrt{2})^2$

Scanné avec CamScanner

$x_1 = \frac{-6-4\sqrt{2}}{2} = -3-2\sqrt{2}; x_2 = \frac{-6+4\sqrt{2}}{2} = -3+2\sqrt{2}$

d'où : $S_3 =]-\infty;-3-2\sqrt{2}] \cup [-3+2\sqrt{2};+\infty[$; $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left[-3+2\sqrt{2};\frac{3}{2}\right]$.

d) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} \prec 1$: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} \prec 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \prec 1+\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 et \\ x \geq 0 et \\ x+1 \prec (1+\sqrt{x})^2 \end{cases}$

* $x+1 \geq 0 et x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0; S_1 = [0;+\infty[$

* $x+1 \prec (1+\sqrt{x})^2 \Rightarrow x+1 \prec 1+x+2\sqrt{x} \Rightarrow 2\sqrt{x} \succ 0 \Rightarrow x \succ 0 \Rightarrow S_2 =]0;+\infty[$

. $S = S_1 \cap S_2 =]0;+\infty[$.

Exercise4

Résolvons dans IR : a) $\sqrt{x^2-2x} \succ 1-x$: $\sqrt{x^2-2x} \succ 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x \geq 0 \\ et \\ 1-x \leq 0 \end{cases} ou \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ et \\ x^2-2x \succ (1-x)^2 \end{cases}$

* $x^2-2x \geq 0 \Rightarrow x(x-2) \geq 0 \Rightarrow S_1 =]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$
$1-x \leq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow S_2 = [1;+\infty[$ $S_3 = S_1 \cap S_2 = [2;+\infty[$

* $1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow S_4 =]-\infty;1]$ $S_6 = S_4 \cap S_5 = \{\}$ donc : . $S = S_3 \cup S_6 = [2;+\infty[$.
$x^2-2x \succ (1-x)^2 \Rightarrow 0 \succ 1 \, faux \Rightarrow S_5 = \{\}$

b) $\sqrt{3(x^2-1)} \geq 2x-1$: $\sqrt{3(x^2-1)} \geq 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ et \\ 2x-1 \leq 0 \end{cases} ou \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ et \\ 3(x^2-1) \geq (2x-1)^2 \end{cases}$

$x^2-1 \geq 0 \Rightarrow S_1 =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

* $2x-1 \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow S_2 = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ $S_3 = S_1 \cap S_2 =]-\infty;-1]$

* $2x-1 \geq 0 \Rightarrow S_4 = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ . . $S_6 = S_4 \cap S_5 = \{2\}$.

$3(x^2-1) \geq (2x-1)^2 \Rightarrow x^2-4x+4 \leq 0 \Rightarrow (x-2)^2 \leq 0 \Rightarrow S_5 = \{2\}$

d'où : . $S = S_3 \cup S_6 =]-\infty;-1] \cup \{2\}$.

Scanné avec CamScanner

c) $\sqrt{x^2+6x+6} \geq |2x+1|$: $\sqrt{x^2+6x+6} \geq |2x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+6 \geq 0 \\ et \\ x^2+6x+6 \geq (2x+1)^2 \end{cases}$

* $x^2+6x+6 \geq 0; \Delta = 36-4(6) = 12 = (2\sqrt{3})^2$ $S_1 =]-\infty;-3-\sqrt{3}] \cup [-3+\sqrt{3};+\infty[$
$x_1 = -3-\sqrt{3} et x_2 = -3+\sqrt{3}$

* $x^2+6x+6 \geq (2x+1)^2 \Rightarrow 3x^2-2x-5 \leq 0; \Delta = 4-4(3)(-5) = 64 = 8^2$ $S_2 = \left[-1;\frac{5}{3}\right]$
$x_1 = -1 et x_2 = \frac{5}{3}$

En conclusion : $S = S_1 \cap S_2 = \left[-1;\frac{5}{3}\right]$

Exercice5

Résoudre dans IR les inéquations suivantes : a) $\sqrt{x-1} \prec \sqrt{2x-3}$

$\sqrt{x-1} \prec \sqrt{2x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 & x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow S_1 = [1;+\infty[\\ et & ; \\ x-1 \prec 2x-3 & x-1 \prec 2x-3 \Rightarrow x \succ 2 \Rightarrow S_2 =]2;+\infty[\end{cases}$

$S = S_1 \cap S_2 =]2;+\infty[$

b) $\sqrt{2x^2+3x-2} \leq \sqrt{x^2-2}$ _ $\sqrt{2x^2+3x-2} \leq \sqrt{x^2-2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+3x-2 \geq 0 et \\ x^2-2 \geq 0 \\ 2x^2+3x-2 \leq x^2-2 \end{cases}$

$*2x^2+3x-2 \geq 0; \Delta = 9-4(2)(-2) = 25 = 5^2;$

$x_1 = -2; x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow S_1 =]-\infty;-2] \cup \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ $S = S_1 \cap S_2 = [-3;-2]$

$*2x^2+3x-2 \leq x^2-2 \Rightarrow x^2+3x \leq 0 \Rightarrow S_2 = [-3;0]$

c) $\sqrt{-x+4} \succ \sqrt{x^2+2x}$: $\sqrt{-x+4} \succ \sqrt{x^2+2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x \succ 0 \\ et \\ -x+4 \succ x^2+2x \end{cases}$

$*x^2+2x \geq 0 \Rightarrow x(x+2) \geq 0 \Rightarrow S_1 =]-\infty;-2] \cup [0;+\infty[$ $S = S_1 \cap S_2 =]-4;-2] \cup [0;1[$

$*-x+4 \succ x^2+2x \Rightarrow x^2+3x-4 \prec 0 \Rightarrow (x-1)(x+4) \prec 0$

$S_2 =]-4;1[$

Scanné avec CamScanner

d) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}\succ\sqrt{4x+5}$: $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}\succ\sqrt{4x+5}\Leftrightarrow\begin{cases}x+4\geq 0 et\\ x-1\geq 0 et\\ 4x+5\geq 0 et\\ (\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1})^2\succ 4x+5\end{cases}$

* $x+4\geq 0 et x-1\geq 0 et 4x+5\geq 0\Rightarrow S_1=[1;+\infty[$

* $(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1})^2\succ 4x+5\Rightarrow x+4+x-1+2\sqrt{(x+4)(x-1)}\succ 4x+5\Rightarrow 2x+3+2\sqrt{(x+4)(x-1)}\succ 4x+5$
$\Rightarrow 2\sqrt{(x+4)(x-1)}\succ 2x+2\Rightarrow 4(x^2+3x-4)\succ 4x^2+8x+4\Rightarrow x\succ 5\Rightarrow S_2=]5;+\infty[$

donc : $\boxed{S=S_1\cap S_2=]5;+\infty[}$

Exercice6

a) Résoudre dans IR3 (S) : $\begin{cases}x-2y+z=-5(L1)\\ -x+y+2z=-4(L2)\\ 2x-y-z=5(L3)\end{cases}$; $\begin{cases}x-2y+z=-5(L1)\\ -x+y+2z=-4(L2)\\ 2x-y-z=5(L3)\end{cases}$

$L2\leftarrow L1+L2$
$L3\leftarrow\frac{1}{3}(L3-2L1)$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y+z=-5(L1)\\ -y+3z=-9(L2)\\ y-z=5(L3)\end{cases}$; $L3\leftarrow L3+L2\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y+z=-5(L1)\\ -y+3z=-9(L2)\\ 2z=-4(L3)\end{cases}$

$(L3):2z=-4\Rightarrow z=-2$
$(L2):-y+3z=-9\Rightarrow y=3$ $\boxed{S=\{(3;3;-2)\}}$
$(L1):x-2y+z=-5\Rightarrow x=3$

b) Résoudre dans IR4 : $\begin{cases}2x-y-z-t=1\\ -x+2y-z-t=1\\ x+y-2z+t=1\\ x+y+z-2t=-1\end{cases}$ $\begin{cases}2x-y-z-t=1(L1)\\ -x+2y-z-t=1(L2)\\ x+y-2z+t=1)(L3)\\ x+y+z-2t=-1(L4)\end{cases}$

$L1\leftrightarrow L3\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-2z+t=1(L1)\\ -x+2y-z-t=1(L2)\\ 2x-y-z-t=1(L3)\\ x+y+z-2t=-1(L3)\end{cases}$ $\begin{matrix}L2\leftarrow L1+L2\\ L3\leftarrow L3-2L1\\ L4\leftarrow L4-L1\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-2z+t=1(L1)\\ 3y-3z=2(L2)\\ -3y+3z-3t=-1(L3)\\ 3z-3t=-2\end{cases}$

$L3\leftrightarrow L4\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-2z+t=1(L1)\\ 3y-3z=2(L2)\\ 3z-3t=-2(L3)\\ -3y+3z-3t=-1(L4)\end{cases}$; $L4\leftarrow L2+L4\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-2z+t=1\\ 3y-3z=2\\ 3z-3t=-2\\ -3t=1\end{cases}$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow \begin{cases} L4 : -3t = 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{3} \\ L3 : 3z - 3t = -2 \Rightarrow z = -1 \\ L2 : 3y - 3z = 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \\ L1 : x + y - 2z + t = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{d'où} \boxed{. \ S = \left\{\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-1;-\frac{1}{3}\right)\right\} \ .}$$

Exercice7

Résoudre dans IRIR : $\begin{cases} 7xy - 5(x+y) = 15 \\ 11xy - 8(x+y) = 22 \end{cases}$

Posons p = xy et s = x + y. On obtient ainsi (E) : $\begin{cases} 7p - 5s = 15 (L1) \\ 11p - 8s = 22 (L2) \end{cases}$

En faisant $11(L1) - 7L2$; on trouve $s = 11$

En remplaçant la valeur de s dans $L1$, on trouve $p = 10$ => On a donc : $\begin{cases} x + y = 11 \\ xy = 10 \end{cases}$

x et y sont solutions de $x^2 - 11x + 10 = 0$

$\Delta = 11^2 - 4(10) = 81 = 9^2$ d'où : $x_1 = 1 et x_2 = 10$

Conclusion : $\boxed{. \ S = \{(1 ; 10) ; (10 ; 1)\} \ .}$

Exercice8

Soit N ce nombre. Posons x le chiffre des centaines, y le chiffre des dizaines et z le chiffre des unités (xyz).
N = 100x + 10y + z.

* la somme de ses chiffres est 17. On a donc : (1) : x + y + z = 17

* Si on permute le chiffre des dizaines et celui des centaines (yxz), le nouveau nombre est 100y + 10x + z qui est N + 360 . On a ainsi : (2) : 100y + 10x + z = (100x + 10y + z) + 360 $\Leftrightarrow$ x-y = -4

* Si on permute le chiffre des unités et celui des centaines (zyx) ; le nombre obtenu est 100z + 10y + x qui est aussi N-198. On a : (3) : 100z + 10y + x = 100x + 10y + z-198 $\Leftrightarrow$ x-z = 2

En résolvant le système (S) : $\begin{cases} x + y + z = 17 \\ x - y = -4 \\ x - z = 2 \end{cases}$; on trouve x = 5 ; y = 9 et z = 3

Conclusion : le nombre $\boxed{. \ N = 593 \ .}$

Scanné avec CamScanner

Exercice9

Soit x et y les dimensions de la parcelle

La surface est : $xy = 480$. Comme la diagonale est 34 alors $34^2=x^2+y^2$. On a : $\begin{cases} x^2+y^2=34^2 \\ xy=480 \end{cases}$

on a : $2xy = 960$ ainsi $x^2+y^2+2xy = 34^2+960$

$x^2+y^2+2xy=34^2+960 \Rightarrow x^2+y^2+2xy=2116 \Rightarrow (x+y)^2=46^2 \Rightarrow x+y=46$ car les dimensions sont positives. D'où le système $\begin{cases} x^2+y^2=34^2 \\ xy=480 \end{cases}$ revient à $\begin{cases} x+y=46 \\ xy=480 \end{cases}$.

Résolvons (S) : $\begin{cases} x+y=46 \\ xy=480 \end{cases}$ .On a : $X^2 - 46X + 480 = 0$.

$\Delta = 46^2-4\times480=196=14^2$ d'où $X_1=\dfrac{46+14}{2}=30$ *et* $X_2=\dfrac{46-14}{2}=16$

La parcelle de Sogo SANOU a pour longueur 30m et de largeur 16m.

Chapitre 3 : Trigonométrie.

Exercice 1

1- Calculons :

$A=\sin(\pi-\frac{\pi}{3})+\frac{1}{4}\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})-2\sin(-\pi+\frac{\pi}{4})$

$A=\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}+2\sin(\pi-\frac{\pi}{4})$

$A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}+2\sin\frac{\pi}{4}$

$A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}+\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{9\sqrt{2}}{8}$

$B=2\cos(\frac{\pi}{3})+4\sin(-\frac{\pi}{6})+3\sin(\frac{7\pi}{6})-1$

; $B=2\cos\frac{\pi}{3}-4\sin\frac{\pi}{6}+3\sin(\pi+\frac{\pi}{6})-1$

$B=2\cos\frac{\pi}{3}-4\sin\frac{\pi}{6}-3\sin\frac{\pi}{6}-1$

$B=2\times\frac{1}{2}-4\frac{1}{2}-3\frac{1}{2}-1 \quad B=-\frac{7}{2}$

$C=-2\sin(\frac{13\pi}{4})+4\sin(\frac{3\pi}{4})+\sin(\frac{103\pi}{2})$

$C=-2\sin(3\pi+\frac{\pi}{4})+4\sin(\pi-\frac{\pi}{4})+\sin(52\pi-\frac{\pi}{2})$

$C=-2\sin(\pi+\frac{\pi}{4})+4\sin\frac{\pi}{4}+\sin(-\frac{\pi}{2})$

$C=2\sin(\frac{\pi}{4})+4\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{2}$

$C=\sqrt{2}+2\sqrt{2}-1=3\sqrt{2}-1$

$D=\sqrt{2}\sin(-\pi-\frac{\pi}{4})-\cos(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})+\sin(\frac{-5\pi}{2}-\frac{\pi}{4})-1$

$D=\sqrt{2}\sin(\pi-\frac{\pi}{4})-\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})+\sin(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})-1$

; $D=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4})+\sin(\frac{\pi}{4})-\cos\frac{\pi}{4}-1$

$D=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-1=0$

2-) Exprimons en fonction de sin x et de cos x les expressions suivantes :

Scanné avec CamScanner

$E = 2\cos(x-\frac{\pi}{2}) + \sin(\pi+x) + 3\cos(x+\frac{\pi}{2}) - \sin(\pi-x)$

$E = 2\cos(\frac{\pi}{2}-x) - \sin x - 3\sin x - \sin x$

$E = 2\sin x - \sin x - 3\sin x - \sin x = -3\sin x$

$F = \sin(x-\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{2}) + \cos(x-\frac{11\pi}{2}) + \sin(x-\pi)$;

$F = \sin(x+3\pi) + \cos(x+\frac{\pi}{2}) - \sin x$

$F = -\sin x - \sin x - \sin x = -3\sin x$

$G = -3\cos(-\frac{7\pi}{2}+x) + 2\sin(x-\frac{3\pi}{2}) + \cos(2\pi - x)$

$G = -3\cos(\frac{\pi}{2}+x) + 2\sin(x+\frac{\pi}{2}) + \cos(-x)$ $G = 3\sin x + 2\cos x + \cos x = 3\cos x + 3\sin x$

Exercice 2

1- Soit x un réel donné tel que $\sin^2 x = \frac{3}{5}$.

a) Calculons $\sin x$; $\cos x$ et $\sin 2x$ si $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

* sin x ; $\sin^2 x = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin x = \sqrt{\frac{3}{5}} ou \sin x = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ Comme $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ alors $\boxed{\sin x = \sqrt{\frac{3}{5}}}$

* cos x ; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{2}{5} \Rightarrow \cos x = \sqrt{\frac{2}{5}} ou \cos x = -\sqrt{\frac{2}{5}}$

Comme $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ alors $\boxed{\cos x = -\sqrt{\frac{2}{5}}}$

* sin2x ; $\boxed{\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2\sqrt{\frac{3}{5}} \times (-\sqrt{\frac{2}{5}}) = -\frac{2\sqrt{6}}{5}}$

b) Calculons tanx et cos2x si $x \in \left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$

$\sin^2 x = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin x = \sqrt{\frac{3}{5}} ou \sin x = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ comme : $x \in \left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$ alors $\sin x = -\sqrt{\frac{3}{5}}$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{2}{5} \Rightarrow \cos x = \sqrt{\frac{2}{5}} ou \cos x = -\sqrt{\frac{2}{5}}$

comme : $x \in \left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$ alors : $\cos x = -\sqrt{\frac{2}{5}}$

On a : $\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\sqrt{\frac{3}{5}}}{-\sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$; $\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{2}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{5}}$

Scanné avec CamScanner

2- On donne $\cos x = -\frac{3}{5}$; Calculons $\sin\frac{x}{2}$ et $\cos\frac{x}{2}$ sachant que $x \in [0;\pi]$

$\cos x = \cos(2\times\frac{x}{2})$ donc $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{\cos x+1}{2}$ et $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ D'où $\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ou $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

pour $x \in [0;\pi] \Rightarrow \frac{x}{2} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc : $\boxed{\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}}$ ainsi : $\boxed{\sin\frac{x}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}}$

3- On considère un nombre α tel que $\frac{\pi}{2} \prec \alpha \prec \pi$ et $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \frac{2}{3}$.

Calculons $\sin\alpha$; $\cos\alpha$ et $\cos 2\alpha$

¤) $\boxed{\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{3}}$

¤) $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ou $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ comme $\frac{\pi}{2} \prec \alpha \prec \pi$ donc : $\boxed{\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}}$

¤) $\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}}$

Exercice 3

1- a) Démontrons que : $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x$. On transforme le second membre :

$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x$ car : $sin^2x + cos^2x = 1$

$\sin^4 x - \cos^4 x = (1-\cos^2 x) - \cos^2 x \Rightarrow \boxed{\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x}$

b Démontrons que : $\cos^4 x + \sin^2 x\cos^2 x - \cos^2 x = 0$

$\cos^4 x + \sin^2 x\cos^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x.\cos^2 x + \sin^2 x.\cos^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x - 1)$

Or $sin^2x + cos^2x = 1$ donc $\boxed{\cos^4 x + \sin^2 x\cos^2 x - \cos^2 x = 1 - 1 = 0}$

c) pour $x \neq k\pi$, montrons que : $\frac{1+\cos 2x - \sin 2x}{1-\cos 2x - \sin 2x} = -\frac{\cos x}{\sin x}$

$$\frac{1+\cos 2x - \sin 2x}{1-\cos 2x - \sin 2x} = \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) - 2\sin x\cos x}{(\cos^2 x + \sin^2 x) - (\cos^2 x - \sin^2 x) - 2\sin x\cos x} = \frac{2\cos^2 x - 2\sin x\cos x}{2\sin^2 x - 2\sin x\cos x}$$

$$\boxed{\frac{1+\cos 2x - \sin 2x}{1-\cos 2x - \sin 2x} = \frac{2\cos x(\cos x - \sin x)}{-2\sin x(\cos x - \sin x)} = -\frac{\cos x}{\sin x}}$$

2- Calculons $A = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$

$$A = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} \Rightarrow A = \cos(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}) \Rightarrow A = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

Exercice4

1-Montrons que : $Cosx + Cos(x + \frac{2\pi}{3}) + Cos(x + \frac{4\pi}{3}) = 0$

Scanné avec CamScanner

$$Cosx + Cos(x+\frac{2\pi}{3}) + Cos(x+\frac{4\pi}{3}) = \cos x + \cos(x+\pi-\frac{\pi}{3}) + \cos(x+\pi+\frac{\pi}{3})$$

$$Cosx + Cos(x+\frac{2\pi}{3}) + Cos(x+\frac{4\pi}{3}) = \cos x - \cos(x-\frac{\pi}{3}) - \cos(x+\frac{\pi}{3})$$

$$Cosx + Cos(x+\frac{2\pi}{3}) + Cos(x+\frac{4\pi}{3}) = \cos x - (\cos x\cos\frac{\pi}{3} + \sin x\sin\frac{\pi}{3}) - (\cos x\cos\frac{\pi}{3} - \sin x\sin\frac{\pi}{3})$$

$$Cosx + Cos(x+\frac{2\pi}{3}) + Cos(x+\frac{4\pi}{3}) = \cos x - 2\cos x\cos\frac{\pi}{3} = \cos x - 2\cos x.\frac{1}{2} = \cos x - \cos x = 0$$

2- Exprimer sin3x en fonction de sin x ; cos3x en fonction de cos x.

* $\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x = 2\sin x\cos x\cos x + (1-2\sin^2 x)\sin x$

$\sin 3x = 2\sin x\cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x$

$\sin 3x = 2\sin x(1-\sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x = 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$\boxed{\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x}$

* $\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x = (2cox^2 x - 1)\cos x - 2\cos x\sin x\sin x$

$\cos 3x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x\sin^2 x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1-\cos^2 x)$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

Exercice5

1- On donne : $A = Cos^2\frac{\pi}{8} + Cos^2\frac{3\pi}{8} + Cos^2\frac{5\pi}{8} + Cos^2\frac{7\pi}{8}$

$B = Sin^2\frac{\pi}{8} + Sin^2\frac{3\pi}{8} + Sin^2\frac{5\pi}{8} + Sin^2\frac{7\pi}{8}$

Calculons : A + B puis A-B et déduire les exactes de A et B

$$A + B = (Cos^2\frac{\pi}{8} + Cos^2\frac{3\pi}{8} + Cos^2\frac{5\pi}{8} + Cos^2\frac{7\pi}{8}) + (Sin^2\frac{\pi}{8} + Sin^2\frac{3\pi}{8} + Sin^2\frac{5\pi}{8} + Sin^2\frac{7\pi}{8})$$

On sait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc ( ) :

$$A + B = (Cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}) + (Cos^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8}) + (Cos^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8}) + (Cos^2\frac{7\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8})$$

$A + B = 4$ (1)

$$A\text{-}B = (Cos^2\frac{\pi}{8} + Cos^2\frac{3\pi}{8} + Cos^2\frac{5\pi}{8} + Cos^2\frac{7\pi}{8}) - (Sin^2\frac{\pi}{8} + Sin^2\frac{3\pi}{8} + Sin^2\frac{5\pi}{8} + Sin^2\frac{7\pi}{8})$$

$$A\text{-}B = (Cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}) + (Cos^2\frac{3\pi}{8} - \sin^2\frac{3\pi}{8}) + (Cos^2\frac{5\pi}{8} - \sin^2\frac{5\pi}{8}) + (Cos^2\frac{7\pi}{8} - \sin^2\frac{7\pi}{8})$$

On sait que $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ d'où :

$$A\text{-}B = \cos(2\times\frac{\pi}{8}) + \cos(2\times\frac{3\pi}{8}) + \cos(2\times\frac{5\pi}{8}) + \cos(2\times\frac{7\pi}{8})$$

$$= \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4}$$

Scanné avec CamScanner

$= \cos\frac{\pi}{4} + \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) + \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) + \cos(2\pi - \frac{\pi}{4})$

$= \cos\frac{\pi}{4} - \cos(\frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4})$ $\Rightarrow$ A-B = 0 (2)

Calculons : A et B : (2) : on a A = B ; de (1), on a : 2A = 4 d'où : $\boxed{A = 2 \text{ et } B = 2}$.

2- a) Calculer $A = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$ et $B = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$

$A = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$; $B = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$

$A = \cos(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ $B = \cos(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

b) En déduire que : $\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$ (. . . . .)

$A + B = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$

$A + B = 2\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} \Rightarrow 2\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}}$.

$A\text{-}B = (\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}) - (\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12})$

$A\text{-}B = 2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} \Rightarrow 2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}}$.

Equations et Inéquations

Exercice6

Résoudre dans IR : a) $\sin x = \frac{1}{2}$; $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi ou x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\boxed{S_R = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in Z\right\}}$.

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos(\frac{3\pi}{4}) \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi ou x = -\frac{3\pi}{4} + k\pi$

Donc : $\boxed{S_{IR} = \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; k \in Z\right\}}$.

c) $Sin(3x + \frac{\pi}{3}) = Sin(\frac{2\pi}{3} - x) \Rightarrow$ c) $3x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - x + 2k\pi$ ou :

$3x + \frac{\pi}{3} = \pi - (\frac{2\pi}{3} - x) + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} ou x = k\pi$ d'où $\boxed{S_{IR} = \{x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}; x = k\pi; k \in Z\}}$.

d) $Cos(2x + \frac{\pi}{6}) = Cos(\frac{\pi}{3} - x) \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi$ ou $2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} - x + 2k\pi$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} ou x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$ $\boxed{. S_{IR} = \{ \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; k \in Z \} .}$

e) $\sin 3x = \cos(x - \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \sin 3x = \sin(\frac{\pi}{2} - (x - \frac{\pi}{6})) \Rightarrow \sin 3x = \sin(\frac{2\pi}{3} - x)$

$\Rightarrow 3x = \frac{2\pi}{3} - x + 2k\pi$ ou $3x = \pi - (\frac{2\pi}{3} - x) + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} ou x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

d'où : $\boxed{. S_{IR} = \{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{6} + k\pi \ ; k \in Z \} .}$

f) $Cos^2(2x - \frac{\pi}{3}) - Cos^2(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow Cos^2(2x - \frac{\pi}{3}) = Cos^2(x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow$

$\Rightarrow Cos(2x - \frac{\pi}{3}) = Cos(x + \frac{\pi}{4})$ ou $Cos(2x - \frac{\pi}{3}) = -Cos(x + \frac{\pi}{4})$

$\boxed{. S_{IR} = \{ \frac{7\pi}{12} + 2k\pi; \frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{19\pi}{12} + 2k\pi; \frac{-11\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \ ; k \in Z \}.}$

g) $3\tan^2 x - 1 = 0$ l'équation existe si : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$3\tan^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} ou \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$; $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan x = \tan(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi .$

On a donc : $\boxed{S_{IR} = \{ \frac{\pi}{6} + k\pi \ ; -\frac{\pi}{6} + k\pi \ ; k \in Z \}}$

h) $\sin 2x = \tan x$; l'équation existe si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\sin 2x = \tan x \Rightarrow 2\sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow 2\sin x \cos^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow 2\sin x(\cos^2 x - \frac{1}{2}) = 0$

$\Rightarrow \sin x = 0$ ou $\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$

* $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

* $\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} ou \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi ou x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi ou x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

On aura ainsi : $\boxed{. S = \{ k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ ; k \in Z \} .}$

Scanné avec CamScanner

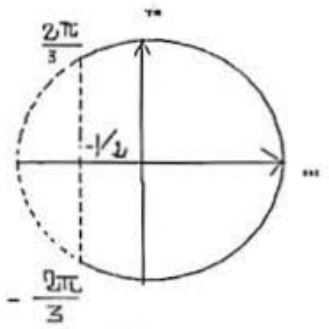
i) $\tan(x+\frac{\pi}{4})-\tan(2x+\frac{\pi}{8})=0 \Rightarrow \tan(x+\frac{\pi}{4})=\tan(2x+\frac{\pi}{8}) \Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=2x+\frac{\pi}{8}+k\pi$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{8}+k\pi$ ce qui donne $\boxed{S_{IR}=\{\frac{\pi}{8}+k\pi \ ; \ k\in Z\}}$.

Exercice7

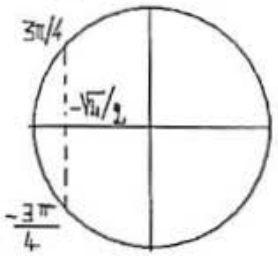
1- Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ a) $Cosx \geq -\frac{1}{2}$; $Cosx=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{2\pi}{3} ou x=-\frac{2\pi}{3}$

Pour $x\in\left[\frac{-2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]; \cos x \geq -\frac{1}{2}$; la partie non hachurée sur le cercle trigonométrique



Donc $\boxed{S_{]-\pi;\pi]}=\left[\frac{-2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]}$.

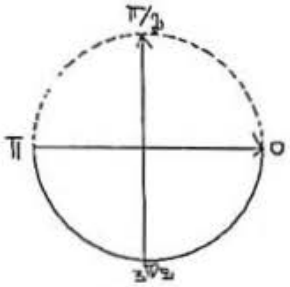
b) $\sqrt{2}\cos x+1\leq 0$



$\sqrt{2}\cos x+1\leq 0 \Rightarrow \cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4} ou x=-\frac{3\pi}{4}$

$\boxed{S_{]-\pi;\pi]}=\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]U\left]-\pi;-\frac{3\pi}{4}\right]}$.

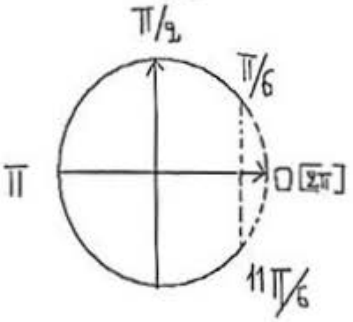
2- Résoudre dans $[0;2\pi]$: a) $Sinx \geq 0$;



$Sinx \geq 0$; pour tout $x\in[0;\pi]; \sin x \geq 0$

donc $\boxed{S[0;2\pi]=[0;\pi]}$.

b) $Cosx \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6} ou x=-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6}$

d'où $\boxed{S[0;2\pi]=\left[0;\frac{\pi}{6}\right]U\left[\frac{11\pi}{6};2\pi\right]}$.

3- Résoudre dans $]-\pi;\pi]$; $2\sin(\frac{\pi}{3}-2x)\leq\sqrt{2}$

Scanné avec CamScanner

$2\sin(\frac{\pi}{3}-2x) \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{3}-2x) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$; posons : $X = \frac{\pi}{3}-2x$

$\sin(\frac{\pi}{3}-2x) \le \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin X \le \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow X \in \left[\frac{3\pi}{4}+2k\pi;\pi+2k\pi\right] U \left]-\pi+2k\pi;\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]$

$X \in \left[\frac{3\pi}{4}+2k\pi;\pi+2k\pi\right] U \left]-\pi+2k\pi;\frac{\pi}{4}+2k\pi\right] \Rightarrow$

$(\frac{\pi}{3}-2x) \in \left[\frac{3\pi}{4}+2k\pi;\pi+2k\pi\right] U \left]-\pi+2k\pi;\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]$

$\Rightarrow -2x \in \left[\frac{5\pi}{12}+2k\pi;\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right] U \left]-\frac{4\pi}{3}+2k\pi;-\frac{\pi}{12}+2k\pi\right]$

$\Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{3}+k\pi;-\frac{5\pi}{24}+k\pi\right] U \left[\frac{\pi}{24}+k\pi;\frac{2\pi}{3}+k\pi\right[$

pour k = 0 ; $x \in \left[-\frac{\pi}{3};-\frac{5\pi}{24}\right] U \left[\frac{\pi}{24};\frac{2\pi}{3}\right[$

pour k = 1 ; $x \in \left[-\frac{\pi}{3}+\pi;-\frac{5\pi}{24}+\pi\right] \Rightarrow x \in \left[\frac{2\pi}{3};\frac{19\pi}{24}\right]$

pour k = -1 $x \in \left[\frac{\pi}{24}-\pi;\frac{2\pi}{3}-\pi\right[\Rightarrow x \in \left[-\frac{23\pi}{24};-\frac{\pi}{3}\right[$ donc :

$S = \left[-\frac{\pi}{3};-\frac{5\pi}{24}\right] U \left[\frac{\pi}{24};\frac{2\pi}{3}\right[U \left[\frac{2\pi}{3};\frac{19\pi}{24}\right] U \left[-\frac{23\pi}{24};-\frac{\pi}{3}\right[= \left[-\frac{\pi}{3};-\frac{5\pi}{24}\right] U \left[\frac{\pi}{24};\frac{19\pi}{24}\right[U \left[-\frac{23\pi}{24};-\frac{\pi}{3}\right[$.

4- Résoudre dans $[0;2\pi]$: $\cos(3x+\frac{\pi}{6}) \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$; posons : $X = 3x+\frac{\pi}{6}$

$\cos X \le -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow X \in \left[\frac{5\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right] \Rightarrow (3x+\frac{\pi}{6}) \in \left[\frac{5\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right]$

$\Rightarrow x \in \left[\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3};\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right]$

Pour k = 0 ; $x \in \left[\frac{2\pi}{9};\frac{\pi}{3}\right]$; pour k = 1 $x \in \left[\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow x \in \left[\frac{8\pi}{9};\pi\right]$

Pour k = 2 ; $x \in \left[\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi}{3};\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right] \Rightarrow x \in \left[\frac{14\pi}{9};\frac{5\pi}{3}\right]$ $S = \left[\frac{2\pi}{9};\frac{\pi}{3}\right] U \left[\frac{8\pi}{9};\pi\right] U \left[\frac{14\pi}{9};\frac{5\pi}{3}\right]$.

Exercice8

1- Résoudre dans $[0;2\pi]$; a) $(Cosx+\frac{\sqrt{3}}{2})(Sinx-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$

$(Cosx+\frac{\sqrt{3}}{2})(Sinx-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0 \Rightarrow (Cosx+\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$ ou $(Sinx-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$

Scanné avec CamScanner

$* (Cosx + \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0 \Rightarrow Cosx = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} ou x = \frac{7\pi}{6}$

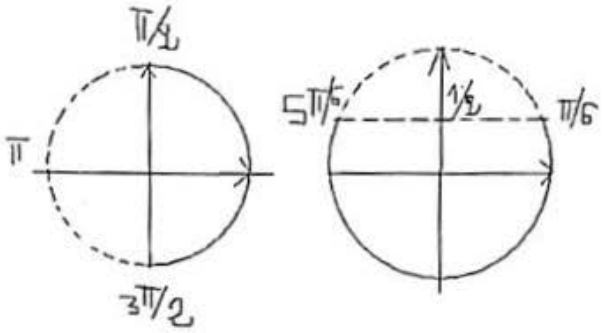
$* (Sinx - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0 \Rightarrow Sinx = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} ou x = \frac{2\pi}{3}$ alors : $\boxed{.S[0;2\pi] = \{\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\}.}$

b) $Cosx(\frac{1}{2} - Sinx) \prec 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} ou x = \frac{3\pi}{2}$;

$(\frac{1}{2} - Sinx) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = Sinx \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} ou x = \frac{5\pi}{6}$

Pour $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]; \cos x \leq 0$



et pour $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]; \frac{1}{2} \leq \sin x \Rightarrow \frac{1}{2} - \sin x \leq 0$

Dressons maintenant un tableau de signe :

x	0		$\pi/6$		$\pi/2$		$5\pi/6$		$3\pi/2$		2π
$\cos x$	+		+	0	-		-	0	+		
$\frac{1}{2} - \sin x$	+	0	-		-	0	+		+		
$\cos x(\frac{1}{2} - \sin x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+		

$$\boxed{.S[0;2\pi] = \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right[.}$$

2- Résoudre dans IR : a) $Sin3xCox2x - Cos3xSin2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$Sin3xCox2x - Cos3xSin2x = \sin(3x - 2x) = \sin x$

$Sin3xCox2x - Cos3xSin2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow Sinx = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi ou x = \pi - (-\frac{\pi}{4}) + 2k\pi$

$$\boxed{S_{IR} = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi; k \in Z\right\}}$$

b) $-\sqrt{3}Cos2x + Sin2x = 1$; Posons $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

$-\sqrt{3}Cos2x + Sin2x = 1 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{5\pi}{6}\cos 2x + \sin\frac{5\pi}{6}\sin 2x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x(2x - \frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x - \frac{5\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{3}$

Scanné avec CamScanner

$$\cos(2x-\frac{5\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\Rightarrow x=\frac{7\pi}{12}+k\pi\\ ou\\ 2x-\frac{5\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{cases}\quad;\quad\boxed{.\ S_{IR}=\left\{\frac{7\pi}{12}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in Z\right\}.}$$

Exercice9

1- Résoudre dans $[0;2\pi]$: a) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin x=\sin\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}ou x=\frac{2\pi}{3}$; d'où $S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$

b) $\cos 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\cos 2x=\cos\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\begin{cases}2x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\Rightarrow x=\frac{3\pi}{8}+k\pi\\ ou\\ 2x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\Rightarrow x=-\frac{3\pi}{8}+k\pi\end{cases}$

donc : $\boxed{.\ S=\left\{\frac{3\pi}{8};\frac{5\pi}{8};\frac{11\pi}{8};\frac{13\pi}{8}\right\}.}$

c) $3\cos x-\sqrt{3}\sin x+\sqrt{6}=0$ On a : $r=\sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

$3\cos x-\sqrt{3}\sin x+\sqrt{6}=0\Leftrightarrow 3\cos x-\sqrt{3}\sin x=-\sqrt{6}\Leftrightarrow\frac{3}{2\sqrt{3}}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\sin x=-\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos(x+\frac{\pi}{6})=\cos\frac{3\pi}{4}$

$\cos(x+\frac{\pi}{6})=\cos\frac{3\pi}{4}\Rightarrow x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ ou $x+\frac{\pi}{6}=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\Rightarrow$

$x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi ou x=-\frac{11\pi}{12}+2k\pi$; donc $\boxed{.\ S=\left\{\frac{7\pi}{12};\frac{13\pi}{12}\right\}.}$

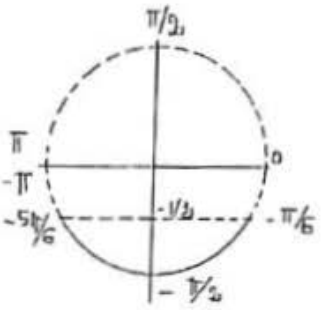
2- Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation :

$$Cos(2x-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\cos(2x-\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{5\pi}{6})\Rightarrow\begin{cases}2x-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow x=\frac{7\pi}{12}+k\pi\\ ou\\ 2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{cases}$$

on aura : $\boxed{.\ S=\left\{\frac{7\pi}{12};\frac{7\pi}{12}-\pi;-\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{4}+\pi\right\}.}$

Scanné avec CamScanner

3- Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation $\sin x \succ -\frac{1}{2}$



$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} ou x = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$

$S =]-\frac{\pi}{6};\pi[\cup]-\pi;-\frac{5\pi}{6}[$

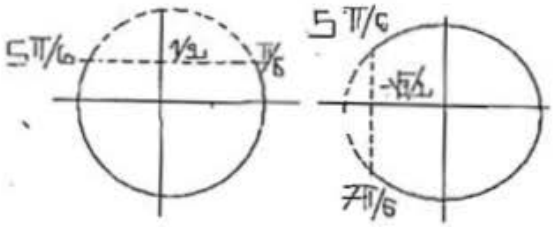
4- Résoudre dans $[0;2\pi]$ $(2\sin x - 1)(Cosx + \frac{\sqrt{3}}{2}) \geq 0$

$(2\sin x - 1)(Cosx + \frac{\sqrt{3}}{2}) \geq 0 \Leftrightarrow 2(\sin x - \frac{1}{2})(\cos x - (-\frac{\sqrt{3}}{2})) \geq 0 \Leftrightarrow (\sin x - \frac{1}{2})(\cos x - (-\frac{\sqrt{3}}{2})) \geq 0$

* $\sin x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \sin x = \sin(\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} ou x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

* $\cos x - (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0 \Rightarrow \cos x = \cos\frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} ou x = \frac{7\pi}{6}$

Pour $x \in [\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}]; \sin x - \frac{1}{2} \geq 0$; pour



$x \in [\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6}]; \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 0$

En faisant le tableau de signe ci-dessous, la solution est donc

$S = [\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6}]$

x	0	$\pi/6$		$5\pi/6$		$7\pi/6$	2π
Sin x- $1/2$	-	0	+	0	-		-
Cos x + $\frac{\sqrt{3}}{2}$	+		+	0	-	0	+
2(Sin x- $1/2$)(Cos x + $\frac{\sqrt{3}}{2}$	-	0	+	0	+	0	-

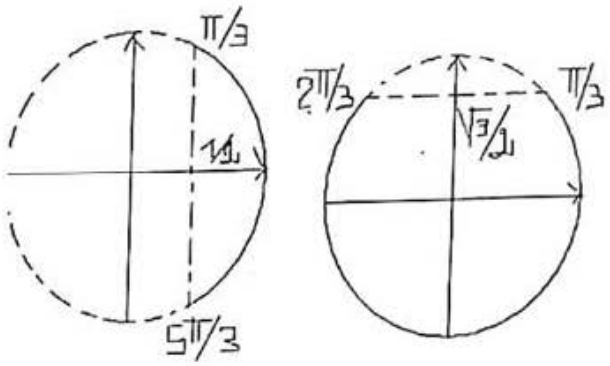
5- Résoudre dans : $[0;2\pi]$ $\frac{1-2\cos x}{2\sin x - \sqrt{3}} \leq 0$; L'inéquation existe si $x \neq \frac{\pi}{3} et x \neq \frac{2\pi}{3}$

Scanné avec CamScanner

$$\frac{1-2\cos x}{2\sin x-\sqrt{3}} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(\frac{1}{2}-\cos x)}{(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2})} \le 0$$

$$\frac{1}{2}-\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} ou x = \frac{5\pi}{3} ;$$

$$\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} ou x = \frac{2\pi}{3}$$



Pour $x \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right], \frac{1}{2}-\cos x \ge 0$; pour $x \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right], \sin x-\frac{\sqrt{3}}{2} \ge 0$

Vu le tableau ci-dessous on a : $\boxed{S = \left]\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right[}$.

x	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	$5\pi/3$	2π
$\frac{1}{2}-\cos x$	-	0 +	+	0	-
$\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-	0 +	0 -		-
$\frac{(\frac{1}{2}-\cos x)}{(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2})}$	+	|| +	||	- 0	+

Exercice10

1- $(2+2\sqrt{3})^2 = 2^2+(2\sqrt{3})^2+2\times2\times2\sqrt{3} = 16+8\sqrt{3}$

Résolvons dans IR $4x^2+(2\sqrt{3}-2)x-\sqrt{3}=0$

$4x^2+(2\sqrt{3}-2)x-\sqrt{3}=0$; $\Delta = (2\sqrt{3}-2)^2-4(4)(-\sqrt{3}) = (2+2\sqrt{3})^2$

$x_1 = \frac{-(2\sqrt{3}-2)-(2+2\sqrt{3})}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = \frac{-(2\sqrt{3}-2)+(2+2\sqrt{3})}{8} = \frac{1}{2}$

$\boxed{S_{IR} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right\}}$

2- Déduisons les solutions dans $[0;2\pi[$ de l'équation $4Sin^2x+(2\sqrt{3}-2)Sinx-\sqrt{3}=0$

Posons X = sinx

$4Sin^2x+(2\sqrt{3}-2)Sinx-\sqrt{3}=0$ devient $4X^2+(2\sqrt{3}-2)X-\sqrt{3}=0 \Rightarrow X = -\frac{\sqrt{3}}{2} ou X = \frac{1}{2}$

Scanné avec CamScanner

$X=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \sin x=\sin(\frac{4\pi}{3})\Rightarrow x=\frac{4\pi}{3} ou x=\frac{5\pi}{3}$

$X=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6} ou x=\frac{5\pi}{6}$

$\boxed{S_{[0;2\pi]}=\left\{\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3};\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}}$

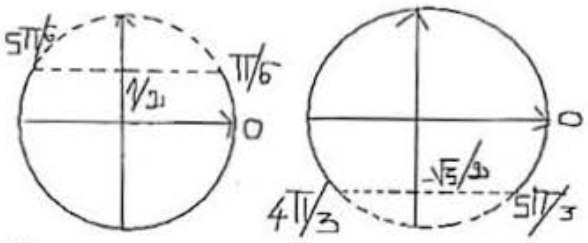
3- Déduire la résolution dans $[0;2\pi]$ de l'inéquation $4Sin^2x+(2\sqrt{3}-2)Sinx-\sqrt{3}\le 0$

$4x^2+(2\sqrt{3}-2)x-\sqrt{3}=4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{\sqrt{3}}{2})$ de même $4Sin^2x+(2\sqrt{3}-2)Sinx-\sqrt{3}=4(\sin x-\frac{1}{2})(\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2})$

$4Sin^2x+(2\sqrt{3}-2)Sinx-\sqrt{3}\le 0\Leftrightarrow 4(\sin x-\frac{1}{2})(\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2})\le 0$

Pour $x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right], \sin x\ge\frac{1}{2}\Rightarrow \sin x-\frac{1}{2}\ge 0$;

pour $x\in\left[\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right], \sin x\le-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\le 0$



Dressons le tableau de signe de $(\sin x-\frac{1}{2})(\sin x-(-\frac{\sqrt{3}}{2}))$

x	0		$\pi/6$		$5\pi/6$		$4\pi/3$		$5\pi/3$		2π
Sin x-$\frac{1}{2}$	-		0	+	0	-		-		-	
Sin x + $\frac{\sqrt{3}}{2}$	+			+		+	0	-	0	+	
4(sin x-$\frac{1}{2}$)(sin x + $\frac{\sqrt{3}}{2}$)	-		0	+	0	-	0	+	0	-	

$\boxed{S=\left[0;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};\frac{4\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{3};2\pi\right]}$

Exercice11

1- a)Vérifions que : $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$; $(1+\sqrt{2})^2=1^2+(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$

b)Résoudre dans IR l'équation : $2x^2+(1-\sqrt{2})x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

Calculons $\Delta=(1-\sqrt{2})^2-4(2)(-\frac{\sqrt{2}}{2})=3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$. Les racines sont donc :

$x_1=\frac{-(1-\sqrt{2})-(1+\sqrt{2})}{4}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{-(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\boxed{S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}}$.

Scanné avec CamScanner

2- Déduire de 1-)

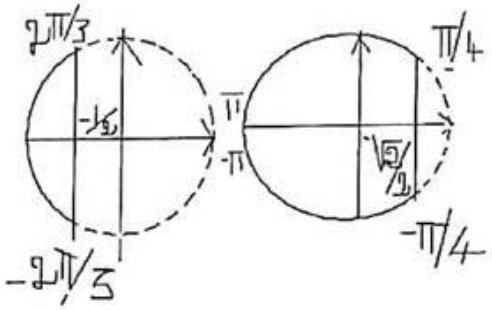
a) La résolution dans IR l'équation : $2\cos^2 x+(1-\sqrt{2})\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ En posant X = cosx

résoudre $2\cos^2 x+(1-\sqrt{2})\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ revient à résoudre : $\cos x=-\frac{1}{2} ou \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi ou x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$; $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+2k\pi ou x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

On a donc : $\boxed{S=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi;-\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{4}+2k\pi;-\frac{\pi}{4}+2k\pi;k\in Z\right\}}$.

b) la résolution dans $]-\pi;\pi]$ $2\cos^2 x+(1-\sqrt{2})\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\succ 0$



$2\cos^2 x+(1-\sqrt{2})\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\succ 0\Leftrightarrow 2(\cos x+\frac{1}{2})(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2})\succ 0$

$(\cos x+\frac{1}{2})=0\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3} oux=-\frac{2\pi}{3}$

$(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2})=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{4} oux=-\frac{\pi}{4}$

Pour $x\in\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$, $\cos x-(-\frac{1}{2})\geq 0$; pour $x\in\left[\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right]$, $\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\geq 0$

X	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
Cos x + $\frac{1}{2}$	-		0	+		+		+	0	-	
Cos x-$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-			-	0	+	0	-		-	
2(cos x + $\frac{1}{2}$)(cos x-$\frac{\sqrt{2}}{2}$)	+		0	-	0	+	0	-	0	+	

$\boxed{S=\left]-\pi;-\frac{2\pi}{3}\right[U\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[U\left]\frac{2\pi}{3};\pi\right[}$

Exercice12

On considère la fonction définie sur IR par $A(x)=Cos2x-\sqrt{3}Sin2x$

1- a) Ecrivons $A(x)$ sous la forme $aCos(2x+\beta)$ (avec $a\succ 0$ et $\beta\in IR$) ; Soit : $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$A(x)=Cos2x-\sqrt{3}Sin2x$, on a $A(x)=\frac{2}{2}(Cos2x-\sqrt{3}Sin2x)=2(\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x)$

Scanné avec CamScanner

On a $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $A(x) = 2(\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{3}\sin 2x)$

d'où : $\boxed{A(x) = 2\cos(2x + \frac{\pi}{3})}$

b) Résoudre A(x) = -1 dans $[0;2\pi]$

$$A(x) = -1 \Rightarrow 2\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = -1 \Rightarrow \cos(2x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ ou \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

pour $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, on a $x = \frac{\pi}{6}$ $oux = \pi + \frac{\pi}{6}$

pour $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, on a $x = -\frac{\pi}{2} + \pi oux = -\frac{\pi}{2} + 2\pi$; donc : $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}}$

2- Résoudre dans [-Π ; Π] $2Sin(\frac{\pi}{6} - 2x) \leq 0$

$$Sin(\frac{\pi}{6} - 2x) = 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{6} - 2x) = \sin 0 \Rightarrow \frac{\pi}{6} - 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ a 4 représentants dans[-Π ; Π] qui sont $\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{12} - \pi$;

d'où : $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{12}; -\frac{5\pi}{12}; -\frac{11\pi}{12}\right\}}$

$-\pi$	$-\frac{11\pi}{12}$	$-\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$ π

pour $x \in \left[-\pi; -\frac{11\pi}{12}\right]$; $(\frac{\pi}{6} - 2x) \in \left[2\pi; 2\pi + \frac{\pi}{6}\right]$ donc $\sin(\frac{\pi}{6} - 2x) \geq 0$

pour $x \in \left[-\frac{11\pi}{12}; -\frac{5\pi}{12}\right]$; $(\frac{\pi}{6} - 2x) \in [\pi; 2\pi]$ donc $\sin(\frac{\pi}{6} - 2x) \leq 0$

pour $x \in \left[-\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{12}\right]$; $(\frac{\pi}{6} - 2x) \in [0; \pi]$ donc $\sin(\frac{\pi}{6} - 2x) \geq 0$

Scanné avec CamScanner

pour $x \in \left[\frac{\pi}{12};\frac{7\pi}{12}\right]$; $(\frac{\pi}{6}-2x) \in [-\pi;0]$ donc $\sin(\frac{\pi}{6}-2x) \leq 0$

pour $x \in \left[\frac{7\pi}{12};\pi\right]$; $(\frac{\pi}{6}-2x) \in \left[-2\pi+\frac{\pi}{6};-\pi\right]$ donc $\sin(\frac{\pi}{6}-2x) \geq 0$

d'où la solution de $2Sin(\frac{\pi}{6}-2x) \leq 0$ est : $\boxed{S=\left[-\frac{11\pi}{12};-\frac{5\pi}{12}\right]U\left[\frac{\pi}{12};\frac{7\pi}{12}\right]}$

3- Résoudre dans [-Π ; Π] a) $Sin(\frac{\pi}{6}-2x)=Sinx$

$$Sin(\frac{\pi}{6}-2x)=Sinx \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6}-2x=x+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3} \\ ou \\ \frac{\pi}{6}-2x=\pi-x+2k\pi \Rightarrow x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi \end{cases}$$

$$\boxed{S=\left\{-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{18};\frac{\pi}{18}-\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}\right\}}$$

b) $Cox=Sin(\frac{\pi}{6}-2x)$

$$Cox=Sin(\frac{\pi}{6}-2x) \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(\frac{\pi}{6}-2x) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{6}-2x+2k\pi \Rightarrow x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ ou \\ \frac{\pi}{2}-x=\pi-(\frac{\pi}{6}-2x)+2k\pi \Rightarrow x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{S=\left\{-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{9};-\frac{\pi}{9}-\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\right\}}$$

Scanné avec CamScanner

Chapitre 4 : Suites

Exercice 1

1- Etudions le sens de variation de chacune des suites définies par : a) $U_n = 5\dfrac{3^{n+2}}{4^{2n-1}}$

Comme pour tout entier naturel n $U_n \succ 0$ alors positionnons $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$

$\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{5\dfrac{3^{n+3}}{4^{2(n+1)-1}}}{5\dfrac{3^{n+2}}{4^{2n-1}}} = 5\dfrac{3^{n+3}}{4^{2n+1}} \times \dfrac{4^{2n-1}}{5.3^{n+2}} = \dfrac{3}{4^2} = \dfrac{3}{16}$; $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \prec 1 \Rightarrow U_{n+1} \prec U_n$ donc : <u>(Un) est décroissante.</u>

b) $V_n = \dfrac{1}{n+2} - 2 \Rightarrow V_{n+1} - V_n = \dfrac{1}{n+3} - 2 - \dfrac{1}{n+2} + 2 = \dfrac{1}{n+3} - \dfrac{1}{n+2} = -\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$

$-\dfrac{1}{(n+2)(n+3)} \prec 0 \Rightarrow V_{n+1} - V_n \prec 0 \Rightarrow V_{n+1} \prec V_n$ d'où : <u>(Vn) est décroissante.</u>

2- Soit V définie par récurrence par : $V_0 = 1$; $V_1 = 3$ et $V_{n+2} = \dfrac{1+V_{n+1}}{2+V_n}$

Calculons : V_2 ; V_3 ; et V_4

$\boxed{V_2 = \dfrac{1+V_1}{2+V_0} = \dfrac{1+3}{2+1} = \dfrac{4}{3}}$; $\boxed{V_3 = \dfrac{1+V_2}{2+V_1} = \dfrac{1+\frac{4}{3}}{2+3} = \dfrac{7}{15}}$; $\boxed{V_4 = \dfrac{1+V_3}{1+V_2} = \dfrac{1+\frac{7}{15}}{2+\frac{4}{3}} = \dfrac{11}{25}}$

Exercice 2

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

1- Etudions la variation de U : $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$;

$n+2 \succ n \Rightarrow \sqrt{n+2} \succ \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n+2}+\sqrt{n+1} \succ \sqrt{n}+\sqrt{n+1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \prec \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \Rightarrow U_{n+1} \prec U_n$ donc : <u>(U_n) est décroissante.</u>

2- Ecrivons U_n sans radical au dénominateur :

$U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

3- Calculer U_0, U_1 et U_2 : $\boxed{U_0 = 1}$; $\boxed{U_1 = \sqrt{2}-1}$; $\boxed{U_2 = \sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Scanné avec CamScanner

4- Calculons $U_0 + U_1 + U_2$: $U_0 + U_1 + U_2 = 1 + (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2})$

$\boxed{U_0 + U_1 + U_2 = \sqrt{3}}$

5- Posons $S_n = U_0 + U_1 + U_2 \ldots\ldots + U_{n-1} + U_n$. Montrons que $S_n = \sqrt{n+1}$

$S_n = U_0 + U_1 + \ldots\ldots + U_n = 1 + ((\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1}$

Exercice 3

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

1- Vérifions que $U_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$: $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)} = U_n$

2- Calculons $U_1 + U_2 + U_3$. : $\boxed{U_1 + U_2 + U_3 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{4}}$

3- $S_n = U_1 + U_2 + \ldots\ldots U_{n-1} + U_n$. Montrons que $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ et calculer la limite de S_n.

$S_n = U_1 + U_2 + \ldots\ldots U_{n-1} + U_n$.

$$\boxed{S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 \text{ car } \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Exercice 4

(U_n) est une suite arithmétique de 1er terme $U_0 = 2$ et de raison $r = -3$

a) Exprimons U_n en fonction de n et déterminer le sens de variation de U.

$U_n = U_0 + nr$ d'où $\boxed{U_n = 2 - 3n}$. U est décroissante car la raison est négative.

b) Calculer la somme des 20 premiers termes. Pour cela on pose S_{20} la somme des 20 premiers termes

$$\boxed{S_{20} = \sum_{k=0}^{19} U_k = \frac{20(U_0 + U_{19})}{2} = \frac{20(2 + (2 - 3 \times 19))}{2} = -530}$$

Exercice 5

Soit (Un) une suite arithmétique telle que : $U_0 + U_1 + \ldots U_{20} = 210$ et $U_{10} + U_{11} = 42$.

Calculons U_0 et la raison r. $U_0 + U_1 + \ldots + U_{20} = \dfrac{21(U_0 + U_{20})}{2}$ or $U_{20} = U_0 + 20r$

donc : $U_0 + U_1 + \ldots + U_{20} = 21(U_0 + 10r) = 210$ d'où $U_0 + 10r = 10$ (1)

On a $U_{10} + U_{11} = (U_0 + 10r) + (U_0 + 11r) = 2U_0 + 21r$ d'où $2U_0 + 21r = 42$ (2)

En résolvant le système (S) : $\begin{cases} U_0 + 10r = 10 \\ 2U_0 + 21r = 42 \end{cases}$ on trouve $\boxed{U_0 = -210 \text{ et } r = 22}$

Scanné avec CamScanner

Exercice 6

Soit (U_n) une suite arithmétique croissante telle que : $U_1 + U_2 = 18$ et $U_1.U_2 = 77$

1- Déterminer U_1 et U_2 et déduire la raison de la suite U.

Posons $U_1 + U_2 = S$ et $U_1.U_2 = P$. U_1 et U_2 sont solutions de l'équation

$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 18x + 77 = 0$; $\Delta = (18)^2 - 4(77) = 16 = 4^2$ d'où $x_1 = 7 et x_2 = 11$

Conclusion : $\boxed{U_1 = 7}$ et $\boxed{U_2 = 11}$ car U est croissante

2- Calculons U_n en fonction de n.

Calculons la raison r . $r = U_2 - U_1 = 4$; $U_n = U_1 + (n-1)r$ d'où : $\boxed{U_n = 7 + 4(n-1) = 4n + 3}$

3- Calculer $S = U_4 + U_5 + \ldots + U_{45} + U_{46}$. => $U_4 = 19 et U_{46} = 187$

$$\boxed{S = U_4 + U_5 + \ldots + U_{45} + U_{46} = \frac{(46-4+1)(U_4 + U_{46})}{2} = 4429}$$

Exercice 7

Soit (V_n) une suite géométrique telle que : $V_0V_2V_3 = 864$ et $V_0V_1V_3 = 432$

1- Déterminons V_0 et la raison q. $\frac{V_0V_2V_3}{V_0V_1V_3} = \frac{V_0V_0.q^2.V_0q^3}{V_0V_0q.V_0q^3} = q$ et $\frac{V_0V_2V_3}{V_0V_1V_3} = \frac{864}{432} = 2$ d'où : $\boxed{q = 2}$

On a : $V_0V_1V_3 = 432 \Leftrightarrow V_0^3 q^4 = 432 \Rightarrow V_0^3 = 27 \Rightarrow V_0^3 = 3^3 \Rightarrow \boxed{V_0 = 3}$

2- Exprimons V_n en fonction de n. $V_n = V_0 q^n \Rightarrow V_n = 3(2)^n$

3- Calculons $S_n = \sum_{k=1}^{n} V_k$ en fonction de n. $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} V_k = V_1 \times \frac{1-2^n}{1-2} = 6(2^n - 1)}$

Exercice 8

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r. On donne $U_{50} = 406$ et $U_{100} = 806$

1- Calculer U_0 et la raison r. $U_{50} = U_0 + 50r = 406$ et $U_{100} = U_0 + 100r = 806$

En résolvant le système (S) : $\begin{cases} U_0 + 50r = 406 \\ U_0 + 100r = 806 \end{cases}$; on trouve : $\boxed{U_0 = 6}$ et $\boxed{r = 8}$

2- Calculons $S = U_{50} + U_{51} + \ldots + U_{100}$.

$$\boxed{U_{50} + U_{51} + \ldots + U_{100} = \frac{(100-50+1)(U_{50} + U_{100})}{2} = \frac{51(406+806)}{2} = 30906}$$

Exercice 9

Un voyageur parcourt 30km le 1er jour puis par la suite, chaque jour, il parcourt 5km de plus que le précédent.

1- Calculer la distance d_2 parcourue le $2^{ème}$ jour puis la distance d_3 parcourue le $3^{ème}$ jour

$d_2 = 30km + 5km = 35km$; $d_3 = d_2 + 5km = 40km$

Scanné avec CamScanner

Exprimer la distance d_n parcourue le $n^{ème}$ jour en fonction de n.
(d_n) est une suite arithmétique de raison r = 5km et de 1^{er} terme $d_1 = 30km$
$d_n = d_1 + (n-1)r$ donc $\boxed{.d_n = 5n + 25\ .}$

2- Calculer la distance D totale parcourue au bout de 10 jours de voyage

$$\boxed{.D = d_1 + d_2 + \ldots + d_{10} = \frac{10(d_1 + d_{10})}{2} = 525km\ .}$$

Exercice 10

Le loyer mensuel d'une maison est de 50000F CFA. Ce loyer augmente chaque année de 6%

1- Soit l_n le montant du loyer dans n ans.

Exprimons l_{n+1} en fonction de l_n et exprimons l_n en fonction de n : $\boxed{.\ l_{n+1} = l_n + \frac{6}{100} l_n = (1{,}06) l_n\ .}$

Soit $l_0 = 50000$ le montant du loyer cette année. On a donc : $\boxed{.\ l_n = l_0 (1{,}06)^n = 50000(1{,}06)^n\ .}$

2- le montant du loyer l'année dans 8 ans est l_8. $\boxed{.\ l_8 = 50000(1{,}06)^8 = 79692{,}40\ .}$

3- Au bout de combien d'années le loyer aura-t-il doublé ?

$l_{11} = 50000(1{,}06)^{11} = 94914{,}92$; $l_{12} = 50000(1{,}06)^{12} = 100609{,}82$. Dans 12 ans le loyer aura doublé.

4- Calculons le montant M des loyers payés pendants les 10 premières années.

$$M = 12l_0 + 12l_1 + \ldots. + 12l_9 = 12(l_0 + l_1 + \ldots. + l_9) = 12\left[l_0 \times \frac{1 - (1{,}06)^{10}}{1 - 1{,}06} \right] = 7.908.476{,}96$$

Exercice 11

Soit U et V deux (2) suites définies par : $\begin{cases} U_n = 6 \\ \forall n \in IN; U_{n+1} = \frac{1}{5} U_n + \frac{4}{5} \end{cases}$ et $\forall n \in IN, V_n = U_n - 1$

1- Démontrons que (V_n) est une suite géométrique

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = (\frac{1}{5} U_n + \frac{4}{5}) - 1 = \frac{1}{5} U_n - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(U_n - 1) \Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{5} V_n$$

donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\boxed{.\ \frac{1}{5}\ .}$ et de 1^{er} terme $\boxed{.\ V_0 = 5\ .}$

2- Exprimons U_n et V_n en fonction de n. Exprimons V_n en fonction de n :

$\boxed{.\ V_n = V_0 (\frac{1}{5})^n = (\frac{1}{5})^{n-1}\ .}$

On a , $V_n = U_n - 1 \Rightarrow U_n = V_n + 1 \Rightarrow$ $\boxed{.\ U_n = \left[\frac{1}{5}\right]^{n-1} + 1\ .}$

Scanné avec CamScanner

3- Calculons les limites des suites (V_n) et (U_n)

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{5})^{n-1} = 0 \text{ car } 0 \prec \frac{1}{5} \prec 1 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} U_n = 1 \text{ car } \lim_{n\to+\infty} V_n = 0$$

Exercice 12

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = -\dfrac{1}{U_n + 2} \end{cases}$

On suppose que $U_n \neq -1$ et on pose $V_n = \dfrac{1}{U_n + 1}$

1- Démontrons que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1er terme V_0.

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}+1} - \frac{1}{U_n+1} = \frac{1}{\frac{-1}{U_n+2}+1} - \frac{1}{U_n+1} = \frac{1}{\frac{U_n+1}{U_n+2}} - \frac{1}{U_n+1}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n+2}{U_n+1} - \frac{1}{U_n+1} = \frac{U_n+1}{U_n+1} = 1$$ d'où (Vn) est une suite arithmétique de raison $\boxed{r = 1}$ et de 1er terme $\boxed{V_0 = \frac{1}{U_0+1} = \frac{1}{2}}$.

2- Exprimer V_n et U_n en fonction de n.

(Vn) etant une suite arithmétique de raison r = 1 et de 1er terme $V0 = = \frac{1}{2}$ alors :

$\boxed{V_n = n + \frac{1}{2}}$. Déduisons U_n en fonction de n.

$$V_n = \frac{1}{U_n+1} \Rightarrow V_n(U_n+1) = 1 \Rightarrow V_nU_n + V_n = 1 \Rightarrow V_nU_n = 1 - V_n \Rightarrow U_n = \frac{1-V_n}{V_n} \Rightarrow U_n = \frac{1-2n}{1+2n}$$

3- Calculons la limite de U et V.

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} (n + \frac{1}{2}) = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-2n}{1+2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-2n}{2n} = -1$$

Exercice 13

Soit (Un) une suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{U_n + 2} \end{cases}$

1- Montrer par récurrence que si $U_0 = 2$ alors U est constante

Posons $U_0 = 2$; calculons U_1. $U1 = \dfrac{3U_0 + 2}{U_0 + 2} = \dfrac{8}{4} = 2$; vraie car $U_0 = U_1$.

Scanné avec CamScanner

Supposons que $U_n = 2$ et montrons que $U_{n+1} = 2$

$U_n = 2 ; U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{U_n + 2} \Rightarrow U_{n+1} = \dfrac{3\times 2 + 2}{2+2} = 2$ donc pour $U_0 = 2$, U est constante

2- On pose ; $V_n = \dfrac{U_n + 1}{U_n - 2}$

a) Montrons que (Vn) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme V_0
V est bien définie car $U_0 \neq 2$

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}+1}{U_{n+1}-2} = \frac{\dfrac{3U_n+2}{U_n+2}+1}{\dfrac{3U_n+2}{U_n+2}-2} = \frac{4U_n+4}{U_n+2}\times\frac{U_n+2}{U_n-2} = 4\frac{U_n+1}{U_n-2}$$

$\Rightarrow V_{n+1} = 4V_n$ d'où V est une suite géométrique de raison q = 4 et 1er terme $\boxed{V_0 = -\frac{1}{2}}$

b) Exprimons V_n en fonction de n. $\boxed{V_n = V_0 q^n = -\frac{1}{2}(4)^n}$

c) Exprimons U_n en fonction de n.

on a : $V_n = \dfrac{U_n + 1}{U_n - 2} \Rightarrow V_n(U_n - 2) = U_n + 1 \Rightarrow V_n.U_n - 2V_n = U_n + 1 \Rightarrow V_nU_n - U_n = 1 + 2V_n$

$$\Rightarrow U_n(V_n - 1) = 1 + 2V_n \Rightarrow U_n = \frac{1+2V_n}{V_n - 1} \text{ d'où : } \boxed{U_n = \frac{1-4^n}{-\frac{1}{2}(4)^n - 1} = \frac{4^n - 1}{2(4)^{n-1} + 1}}$$

Exercice 14

Soit (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 2 \end{cases}$ pour n ∈ IN

1- Calculer U_1, U_2 et U_3.

$$U_1 = \frac{1}{3}U_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3} \; ; \; U_2 = \frac{1}{3}U_1 + 1 - 2 = -\frac{14}{9} \; ; \; U_3 = \frac{1}{3}U_2 + 2 - 2 = -\frac{14}{27}$$

2- Démontrer par récurrence que pour tout n≥4 ; $U_n \geq 0$

* $U_4 = \dfrac{1}{3}U_3 + 3 - 2 = \dfrac{67}{81}$ donc $U_4 \geq 0$

* Supposons que $U_n \geq 0$ pour n≥4 et montrons que $U_{n+1} \geq 0$

$U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n + n - 2$. Par hypothèse on a $U_n \geq 0$ pour n≥4 donc $\dfrac{1}{3}U_n \geq 0$.

Pour n≥4 ; n-2≥2 ⇒ n-2≥0 donc $\dfrac{1}{3}U_n + n - 2 \geq 0 \Leftrightarrow U_{n+1} \geq 0$

Scanné avec CamScanner

On peut donc conclure que pour tout n≥4, $U_n \geq 0$

3- On définit (V_n) par : $V_n = -2U_n + 3n - \frac{21}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Démontrons que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme V_0.

$$V_{n+1} = -2U_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2}$$

$$V_{n+1} = -2(\frac{1}{3}U_n + n - 2) + 3n + 3 - \frac{21}{2} = -\frac{2}{3}U_n + n - \frac{7}{2}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{3}\left[-2U_n + 3n - \frac{21}{2}\right] \Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n$$

d'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\boxed{q = \frac{1}{3}}$ et 1er terme $\boxed{V_0 = -2U_0 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}}$.

b) Exprimer V_n en fonction de n. $V_n = V_0 q^n \Rightarrow V_n = -\frac{25}{2}\left[\frac{1}{3}\right]^n$

c) Déduisons que $U_n = \frac{25}{4}(\frac{1}{3})^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

$$V_n = 2 - U_n + 3n - \frac{21}{2} \Rightarrow 2U_n = -V_n + 3n - \frac{21}{2} \Rightarrow U_n = -\frac{1}{2}V_n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

d'où : $\boxed{U_n = \frac{25}{4}(\frac{1}{3})^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}}$.

d) En posant $a_n = \frac{25}{4}(\frac{1}{3})^n$ et $b_n = \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$ Calculons $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$$

(a_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et $a_0 = \frac{25}{4}$ d'où :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{25}{4}\left[\frac{1-(\frac{1}{3})^n + 1}{1-\frac{1}{3}}\right] = \frac{25}{4} \times \frac{3}{2}\left[1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right] = \frac{75}{8}\left[1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right]$$

(b_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{3}{2}$ et $b_0 = -\frac{21}{4}$

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = \frac{(n+1)(b_0 + b_n)}{2} = \frac{(n+1)(-\frac{21}{4} + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4})}{2} = \frac{(n+1)(\frac{3}{2}n - \frac{21}{2})}{2} = \frac{(n+1)(3n-21)}{4}$$

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = \frac{75}{8}\left[1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right] + \frac{(n+1)(3n-21)}{4}}.$$

4- Calculons la limite de (V_n), de (U_n) et de (S_n).

Scanné avec CamScanner

* $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{3})^n = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{25}{2}(\frac{1}{3})^n = 0$

* $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{3})^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2}n - \frac{21}{4} = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

* $\lim_{n\to+\infty}\frac{75}{8}(1-(\frac{1}{3})^n) = \frac{75}{8}$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(3n-21)}{4} = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

Exercice 15

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_1 = 3$ et pour tout entier naturel n :

$U_{n+2} = \frac{1}{2}a^2U_{n+1} + (a-3)U_n$ avec a un réel.

Soit la suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$

1- pour a = 2. On a $U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n$

a) Déterminons la nature de (V_n).

$V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1} = 2U_{n+1} - U_n - U_{n+1} = U_{n+1} - U_n = V_n$ donc (V_n) est une suite constante ;

d'où : $V_n = U_1 - U_0 = 2$

b) Nature de la suite (U_n)

$V_n = 2$; ainsi $U_{n+1} - U_n = 2$ d'où (U_n) est une suite arithmétique de raison 2

Exprimons U_n en fonction de n. $\boxed{. U_n = U_0 + nr = 2n+1 .}$

Calculons $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ en fonction de n. $\boxed{. S_n = \frac{n(U_1+U_n)}{2} = \frac{n(2n+4)}{2} = n(n+2).}$

2- On pose a = -4. On a $U_{n+2} = 8U_{n+1} - 7U_n$

a) la nature de la suite (V_n) .

$V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1} = 8U_{n+1} - 7U_n - U_{n+1} = 7U_{n+1} - 7U_n = 7(U_{n+1} - U_n)$

$V_{n+1} = 7V_n$ donc V est une suite géométrique de raison q = 7 et de 1er terme $V_0 = 2$

Exprimons V_n en fonction de n. $\boxed{. V_n = V_0(7)^n = 2\times(7)^n .}$

b) Calculons $T_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$ en fonction de n. $\boxed{. T_n = V_0\frac{1-7^{n+1}}{-6} = \frac{1}{3}\left[7^{n+1}-1\right] .}$

c) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $T_n = U_{n+1} - 1$

$T_n = V_0 + V_1 + V_2 \ldots + V_{n-1} + V_n$ comme $V_n = U_{n+1} - U_n$ alors

$T_n = (U_1 - U_0) + (U_2 - U_1) + (U_3 - U_2) + \ldots + (U_n - U_{n-1}) + (U_{n+1} - U_n)$ d'où

$\boxed{. T_n = -U_0 + U_{n+1} = U_{n+1} - 1 .}$

Exprimons Un en fonction de n. On a : $T_n = \frac{1}{3}\left[7^{n+1}-1\right]$; $T_n = U_{n+1} - 1$ d'où

$\frac{1}{3}\left[7^{n+1}-1\right] = U_{n+1} - 1 \Rightarrow U_{n+1} = \frac{1}{3}\left[7^{n+1}-1\right] + 1$ donc $\boxed{. U_n = \frac{1}{3}\left[7^n - 1\right] + 1 .}$

Scanné avec CamScanner

Exercice 16

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 3}{U_n + 4} \end{cases}$ $n \in IN$

1- a) Calculons U_1 et U_2 . $U_1 = \dfrac{2U_0 + 3}{U_0 + 4} = \dfrac{3}{4}$; $U_2 = \dfrac{2U_1 + 3}{U_1 + 4} = \dfrac{18}{19}$

b) Démontrons par récurrence que $0 \le U_n \le 1$

* $U_0 = 0$ vraie pour n = 0

* Supposons que $0 \le U_n \le 1$ et montrons que $0 \le U_{n+1} \le 1$

$U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 3}{U_n + 4} = 2 - \dfrac{5}{U_n + 4}$; On a :

$$0 \le U_n \le 1 \Rightarrow 4 \le U_n + 4 \le 5 \Rightarrow \frac{1}{5} \le \frac{1}{U_n + 4} \le \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{5}{4} \le -\frac{5}{U_n + 4} \le -1 \Rightarrow 2 - \frac{5}{4} \le 2 - \frac{5}{U_n + 4} \le -1 + 2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \le U_{n+1} \le 1 \Rightarrow 0 \le U_{n+1} \le 1$$

donc pour tout n ∈ IN, $0 \le U_n \le 1$

2- a) Démontrons que (U_n) est croissante

Calculons et étudions le signe de $U_{n+1} - U_n$.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} - U_n = \frac{-U_n{}^2 - 2U_n + 3}{U_n + 4} = \frac{(U_n + 3)(1 - U_n)}{U_n + 4}$$

pour tout n ∈ IN, $U_n + 3 \succ 0$ de même que $U_n + 4$ car $0 \le U_n \le 1$.

pour tout n ∈ IN, $0 \le U_n \le 1 \Rightarrow -1 \le -U_n \le 0 \Rightarrow 0 \le 1 - U_n \le 1 \Rightarrow 1 - U_n \ge 0$

donc : $U_{n+1} - U_n \ge 0$ d'où (U_n) est croissante.

b) Démontrons par récurrence que $U_n = \dfrac{3 - 3(\frac{1}{5})^n}{3 + (\frac{1}{5})^n}$

* $\dfrac{3 - 3(\frac{1}{5})^0}{3 + (\frac{1}{5})^0} = 0 = U_0$; vraie pour n = 0

* Supposons que : $U_n = \dfrac{3 - 3(\frac{1}{5})^n}{3 + (\frac{1}{5})^n}$ et montrons que : $U_{n+1} = \dfrac{3 - 3(\frac{1}{5})^{n+1}}{3 + (\frac{1}{5})^{n+1}}$ $U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 3}{U_n + 4}$

Scanné avec CamScanner

Par hypothèse $U_n = \dfrac{3-3(\frac{1}{5})^n}{3+(\frac{1}{5})^n}$. On a : $U_{n+1} = \dfrac{2\left[\dfrac{3-3(\frac{1}{5})^n}{3+(\frac{1}{5})^n}\right]+3}{\dfrac{3-3(\frac{1}{5})^n}{3+(\frac{1}{5})^n}+4} = \dfrac{6-6(\frac{1}{5})^n+9+3(\frac{1}{5})^n}{3-3(\frac{1}{5})^n+12+4(\frac{1}{5})^n} = \dfrac{15-3(\frac{1}{5})^n}{15+(\frac{1}{5})^n} \Rightarrow$

$U_{n+1} = \dfrac{5(3-3(\frac{1}{5})^{n+1})}{5(3+(\frac{1}{5})^{n+1})} = \dfrac{3-3(\frac{1}{5})^{n+1}}{3+(\frac{1}{5})^{n+1}}$ donc pour tout n ∈ IN $\boxed{U_n = \dfrac{3-3(\frac{1}{5})^n}{3+(\frac{1}{5})^n}}$

c) Calculons la limite de la suite (U_n).

on a : $0 \prec \dfrac{1}{5} \prec 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{5})^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

Exercice 17

Soit (W_n) la suite définie par : $W_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3$

1- Calculons $W_1; W_2; W_3$.

$W_1 = (2(1)-1)^3 = 1$; $W_2 = 1^3 + (2\times 2-1)^3 = 1+3^3 = 28$; $W_3 = 1^3+3^3+5^3 = 153$

2- Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul ; on a $w_n = 2n^4 - n^2$.

$2\times 1^4 - 1^2 = 1 = W_1$ vraie pour $n = 1$

Supposons que $w_n = 2n^4 - n^2$ .et montrons que $W_{n+1} = 2(n+1)^4 - (n+1)^2$

$W_{n+1} = 1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3 + (2(n+1)-1)^3 = \left[1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3\right] + (2n+1)^3$

$W_{n+1} = W_n + (2n+1)^3$. Par hypothèse $w_n = 2n^4 - n^2$

$W_{n+1} = 2n^4 - n^2 + (2n+1)^3 = (2n^4 - n^2) + (2n+1)^3 = 2n^4 + 4n^3 + 11n^2 + 6n + 1$

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$; $(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6^2 + 4n + 1$

$2n^4 + 4n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (2n^4 + 8n^3 + 12n^2 + 8n + 2) - (n+1)^2$

$2n^4 + 4n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = 2(n+1)^4 - (n+1)^2$ d'où

$W_{n+1} = 2(n+1)^4 - (n+1)^2$ donc pour tout : $n \in IN^*$; $w_n = 2n^4 - n^2$.

3- Déterminons n_0 pour que $w_{n0} = 29161$

$W_n = 29161 \Rightarrow 2n^4 - n^2 = 29161 \Rightarrow 2n^4 - n^2 - 29161 = 0$

Posons $X = n^2$. Résolvons donc $2X^2 - X - 29161 = 0$

$\Delta = 1 - 4(2)(-29161) = 233289 = (483)^2$; $X_1 = -120{,}5 et X_2 = 121$

d'où $X = 121 \Rightarrow n^2 = 121 \Rightarrow n = 11$ donc $n_0 = 11$

Scanné avec CamScanner

Exercice 18

Pour tout entier naturel non nul, on pose : $U_n = 1 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^4} + ... + \frac{2n+1}{2^{2n}}$

1- Calculons $U_n - \frac{1}{4}U_n$ en fonction de n. $U_n = 1 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^4} + ... \frac{2n-1}{2^{2n-2}} + \frac{2n+1}{2^{2n}}$

$$\frac{1}{4}U_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^4} + \frac{5}{2^6} + ... + \frac{2n-1}{2^{2n}} + \frac{2n+1}{2^{2n+2}}$$

$$U_n - \frac{1}{4}U_n = 1 + (\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^2}) + (\frac{5}{2^4} - \frac{3}{2^4}) + ... + (\frac{2n+1}{2^{2n}} - \frac{2n-1}{2^{2n}}) - \frac{2n+1}{2^{2n+2}}$$

$$U_n - \frac{1}{4}U_n = 1 + (\frac{1}{2^1}) + (\frac{1}{2^3}) + ... + (\frac{1}{2^{2n-1}}) - \frac{2n+1}{2^{2n+2}} \quad (U_n - \frac{1}{4}U_n) = 1 - \frac{(2n+1)}{2^{2n+2}} + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{2n-1}}\right]$$

$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{2n-1}}\right]$ est une somme des n premiers termes consécutifs d'une suite géométrique

de raison $q = \frac{1}{4}$ et de 1er terme $\frac{1}{2}$ donc $\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{2n-1}}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\left[1 - (\frac{1}{4})^n\right]$.

Ainsi : $(U_n - \frac{1}{4}U_n) = (1 - \frac{(2n+1)}{2^{2n+2}}) + \frac{2}{3}\left[1 - (\frac{1}{4})^n\right]$

2- Déduire l'expression de *Un* en fonction de n et étudier la convergence de (*Un*)

$$(U_n - \frac{1}{4}U_n) = (1 - \frac{(2n+1)}{2^{2n+2}}) + \frac{2}{3}\left[1 - (\frac{1}{4})^n\right] \Rightarrow \frac{3}{4}U_n = (1 - \frac{(2n+1)}{2^{2n+2}}) + \frac{2}{3}\left[1 - (\frac{1}{4})^n\right]$$

donc : $U_n = \frac{4}{3}(1 - \frac{(2n+1)}{2^{2n+2}}) + \frac{8}{9}\left[1 - (\frac{1}{4})^n\right]$ $\lim_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{2^{2n+2}} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{4})^n = 0$

d'où : $\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{4}{3} + \frac{8}{9} = \frac{20}{9}$ donc (*Un*) est convergente et converge vers $20/9$

Exercice 19

1- Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul $(7^n - 1)$ est divisible par 3.

$7^1 - 1 = 6$; 6 est divisible par 3 ; vraie pour $n = 1$

Supposons que $(7^n - 1)$ est divisible par 3 et montrons que $(7^{n+1} - 1)$ est divisible par 3.

$7^{n+1} - 1 = 7 \times 7^n - 1 = (6+1)7^n - 1 = 6 \times 7^n + (7^n - 1)$

6×7^n est divisible par 3 et par hypothèse $(7^n - 1)$ est divisible par 3 ; donc $6 \times 7^n + (7^n - 1)$ est divisible par 3.

Ainsi pour tout entier naturel non nul $(7^n - 1)$ est divisible par 3.

2- Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

$3 \times 5^{2-1} + 2^{3-2} = 3(5) + 2 = 17$ vrai pour n = 1

Scanné avec CamScanner

Supposons que $(3\times5^{2n-1}+2^{3n-2})$ est divisible par 17 et montrons que $(3\times5^{2n+1}+2^{3n+1})$ est divisible par 17

$$3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}=3\times5^{2n-1}\times25+2^{3n-2}\times2^3$$

$$3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}=3\times5^{2n-1}(17+8)+2^{3n-2}\times8=8(3\times5^{2n-1}+2^{3n-2})+17\times3\times5^{2n-1}$$

$8(3\times5^{2n-1}+2^{3n-2})$ est divisible par 17 car par hypothèse $3\times5^{2n-1}+2^{3n-2}$ est divisible par 17 et $17\times3\times5^{2n-1}$ est multiple de 17 donc $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 17. Ainsi pour tout entier naturel non nul $(3\times5^{2n-1}+2^{3n-2})$ est divisible par 17

Exercice 20

Soit un polynôme $P(x)=ax^3+bx^2+cx$

1- Déterminons a, b et c pour que $P(x+1)-P(x)=x^2$

$$P(x+1)=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)=ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+(a+b+c)$$

$$P(x+1)-P(x)=3ax^2+(3a+2b)x\ +(a+b+c)$$

$$P(x+1)-P(x)=3ax^2+(3a+2b)x\ +(a+b+c)=x^2\ \Rightarrow\begin{cases}3a=1\\3a+2b=0\\a+b+c=0\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{3};b=-\frac{1}{2};c=\frac{1}{6}$$

Donc : $P(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x$

2- on pose $S_n=1^2+2^2+.....+(n-1)^2+n^2$ (avec $n\geq1$)

Déduisons de 1-) le calcul S_n de en fonction de n. On peut prendre $x=n$ ainsi $P(n+1)-P(n)=n^2$.

On a :

$p(2)-p(1)=1^2$

$p(3)-p(2)=2^2$

$p(4)-p(3)=3^2$

...

...

$p(n)-p(n-1)=(n-1)^2$

$p(n+1)-p(n)=n^2$

$p(n+1)-p(1)=1^2+2^2+.....+(n-1)^2+n^2$

$p(n+1)-p(1)=(\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1))-0$

donc : $S_n=1^2+2^2+.....+(n-1)^2+n^2=(\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)$

$$\boxed{S_n=1^2+2^2+.....+(n-1)^2+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 21

Soit (Un) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2\cos\theta \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \end{cases}$ $n \geq 0$ et $0 \leq \theta \leq \pi$

1- Calculons U_1 et U_2 en fonction de θ. $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$

$$U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2+2\cos\theta} = \sqrt{2(1+\cos(2\frac{\theta}{2})} = \sqrt{2\times 2\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

Comme $0 \leq \theta \leq \pi$ alors $0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = \cos\frac{\theta}{2}$ d'où : $U_1 = 2\cos\frac{\theta}{2}$

$$U_2 = \sqrt{2+U_1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{2(1+\cos(2\frac{\theta}{2^2})} = \sqrt{2\times 2\cos^2\frac{\theta}{4}} = 2\cos\frac{\theta}{4}$$

2- Montrons par récurrence que pour tout entier naturel, on a : $U_n = 2\cos(\frac{\theta}{2^n})$

$2\cos(\frac{\theta}{2^0}) = 2\cos\theta = U_0$; vraie pour n = 0

Supposons que $U_n = 2\cos(\frac{\theta}{2^n})$ et montrons que $U_{n+1} = 2\cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$

$$U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} = \sqrt{2+2\cos(\frac{\theta}{2^n})} = \sqrt{2(1+\cos(\frac{\theta}{2^n}))} = \sqrt{2(1+\cos\left[2\frac{\theta}{2^{n+1}}\right])}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \sqrt{2\times 2\cos^2(\frac{\theta}{2^{n+1}})} = 2\cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$$

Donc pour tout entier naturel, $\boxed{U_n = 2\cos(\frac{\theta}{2^n})}$.

3- Calculer la limite de (Un). $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\theta}{2^n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 2\cos(\frac{\theta}{2^n}) = 2$

Chapitre 5 : Dénombrements

Exercice1

Dans une classe les élèves ont le choix d'apprendre soit le latin ou l'arabe

Il y a 40 élèves qui apprennent le latin, 30 l'arabe et 10 apprennent l'arabe et le latin.

Calculons le nombre d'élèves de la classe :

Soit A l'ensemble des élèves apprenant le latin. Soit B l'ensemble des élèves apprenant l'arabe.

Scanné avec CamScanner

Ainsi l'ensemble des élèves de la classe est (AUB) et (A∩B) est l'ensemble des élèves qui apprennent les deux langues, d'où Card(AUB) est le nombre d'élèves de la classe.

Card(AUB) = CardA + CardB-Card(A∩B) $\Rightarrow$ Card(AUB) = 40 + 30-10 = 60.

Il y a 60 élèves dans la classe.

Exercice2

Soit A l'ensemble des élèves qui ont répondu OUI à la Question1.
Soit B l'ensemble des élèves qui ont répondu OUI à la Question2.
A∩B est donc l'ensemble des élèves qui ont répondu OUI à la Question1 et à la Question2.
AUB est l'ensemble des élèves qui ont répondu OUI à une des questions

- CardA=20 ,CardB=35-12=23
- Card(AUB)= 35-5=30 car il y a 5 élèves qui ont répondu NON aux deux questions

Card(AUB)=CardA+CardB-Card(A∩B) $\Rightarrow$ Card(A∩B)=CardA+CardB-Card(AUB)
Card(A∩B)=20+23-30 = 13
Conclusion : Il y a donc **13 élèves** qui ont répondu OUI à la Question1 et à la Question2

Exercice3

1- Calculons en fonction de n, C_n^2 et C_n^3

$C_n^2 = \frac{n!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$; $C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

Résolvons $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$. L'équation existe si n≥3.

$2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n \Rightarrow 2\frac{n(n-1)}{2} + 6\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 9n \Rightarrow n-1+(n-1)(n-2) = 9$

$\Rightarrow n^2 - 2n - 8 = 0 \Rightarrow (n+2)(n-4) = 0 \Rightarrow n = -2 ou n = 4$; $\boxed{. S = \{4\} .}$

2- Résolvons dans IN ; $C_n^5 = C_n^7$

L'équation existe si n ≥ 7

$C_n^5 = C_n^7 \Rightarrow \frac{n!}{5!(n-5)!} = \frac{n!}{7!(n-7)!} \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{7\times 6\times 5!}$

$\Rightarrow 1 = \frac{(n-5)(n-6)}{42} \Rightarrow n^2 - 11n - 12 = 0 \Rightarrow (n+1)(n-12) = 0 \Rightarrow n = -1 ou n = 12$ $\boxed{. S_{IN} = \{12\} .}$

3- Soit N le nombre des nombres entiers naturels à trois (3) chiffres dont les chiffres sont différents.
Exemple : XYZ Il y a 10 chiffres. X ne peut pas prendre la valeur 0

	X	Y	Z
Nombre de choix	9	9	8

d'où : $N = 9\times 9\times 8 = 648$

4- Soit K le nombre de nombres entiers naturels à quatre (4) chiffres différents (WXYZ) qui sont divisibles par 5. Un nombre entier naturel est divisible par 5 s'il se termine par 5 ou 0.
Par exemple : 1965 ; 9750 ; 6325 ;.....

Scanné avec CamScanner

Déterminons K_1 le nombre de nombres entiers naturels à quatre (4) chiffres différents qui se terminent par 5.
W ne peut pas prendre la valeur 0 ni la valeur 5 donc pour W on a 8 choix.

	W	X	Y	Z
Nombre de choix	8	8	7	1

$K_1 = 8\times 8\times 7\times 1 = 448$

Déterminons K_2 le nombre de nombres entiers naturels à quatre (4) chiffres différents qui se terminent par 0.
W ne peut pas prendre la valeur 0, de même que X et Y

	W	X	Y	Z
Nombre de choix	9	8	7	1

$K_2 = 9\times 8\times 7\times 1 = 504$

D'où $\boxed{K = K_1 + K_2 = 448 + 504 = 952}$

5- Développons $(2x-1)^5$ et $(x-1)^6$

- Développons $(2x-1)^5$ .En se servant du *triangle de Pascal*, on a :

$$(2x-1)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4(-1) + 10(2x)^3(-1)^2 + 10(2x)^2(-1)^3 + 5(2x)(-1)^4 + (2x)^0(-1)^5$$

$$(2x-1)^5 = 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$$

- Développons $(x-1)^6$: $(x-1)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$

Exercice 4

Quatre personnes ayant chacun un permis de conduire désirent voyager à bord d'un véhicule de quatre places. Calculons le nombre N de manières dont ils peuvent s'asseoir.
Ici on a une permutation d'où $\boxed{N = 4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24}$

Exercice5

Les 20 membres d'une association se rencontrent pour une réunion.
Calculons le nombre N de poignées de mains poignées échangées.
Une poignée de mains est un sous-ensemble de deux éléments des 20 membres,

donc : $N = C_{20}^2 = \frac{20!}{2!\,8!} = \frac{20\times 19}{2} = 190$. Il y a eu 190 poignées de mains échangées.

Exercice6

Les numéros d'immatriculation des véhicules et motos au Burkina-Faso sont formés du numéro de la province suivi de deux lettres qui à leur tour sont suivies de 4 chiffres.
Déterminons le nombre I de numéros d'immatriculation que la direction des transports peut disposer.
Par exemple : 04 AA 0036 ; 10 MR 2987 ; 11 ZT 0333 ; 44 EJ 9915.

- Le nombre de choix des provinces est : 45
- Le nombre de choix des deux lettres est : 26×26
- Le nombre de choix des 4 chiffres est : $10\times 10\times 10\times 10$

d'où $I = 45\times 26\times 26\times 10\times 10\times 10\times 10 =$ 304.200.000

Exercice7

Un prestataire de téléphonie mobile voudrait mettre à la disposition de sa clientèle des numéros commençant par 81, 82 et 83 suivis de 6 chiffres.
Calculons le nombre N de numéros téléphoniques.
Les numéros sont sous la forme : 81 XX XX XX ; 82 XX XX XX ; 83 XX XX XX où X est un chiffre. On a
3 choix pour les deux premiers chiffres qui sont 81, 82 et 83.
Pour les 6 chiffres suivants, on a : 10^6 choix. D'où $N = 3.\ 10^6 =$ 3.000.000

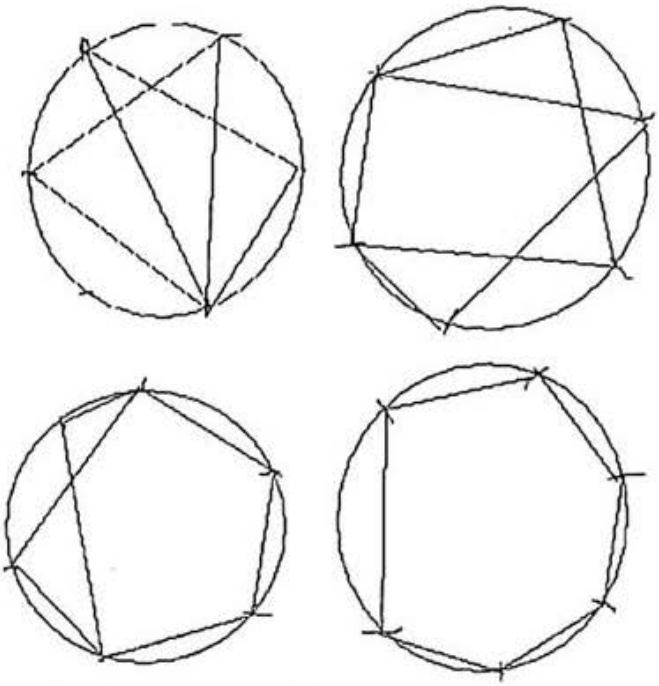
Scanné avec CamScanner

Exercice8

Calculons le nombre P de polygones non croisés dont chacun des sommets est l'un de ces 6 points du cercle.

On peut avoir des triangles (3 sommets), des quadrilatères (4 sommets), des pentagones (5 sommets) et des hexagones (6 sommets).

En exemples, on a les figures ci-contre :



-Un triangle est un sous-ensemble à 3 éléments des 6 points ; donc le nombre de triangles est : $C_6^3 = 20$

-Un quadrilatère est un sous-ensemble à 4 éléments des 6 points ; donc le nombre de quadrilatères est : $C_6^4 = 15$

-Un pentagone est un sous-ensemble à 5 éléments des 6 points ; donc le nombre de pentagones est : $C_6^5 = 6$

-Un hexagone est un sous-ensemble à 6 éléments des 6 points ; donc on a 1 seul hexagone.

On a donc $\boxed{P = 20 + 15 + 6 + 1 = 42.}$

Exercice 9

Un jury est composé de 5 membres pris dans une liste comportant 10 hommes et 8 femmes.

1- Calculons le nombre N de jurys qu'on peut former.

Un jury est un sous-ensemble à 5 éléments des 18 personnes d'où : $\boxed{N = C_{18}^5 = 8568.}$

2- Calculons le nombre : a) N_1 de jurys comprenant seulement des femmes : $\boxed{N_1 = C_8^5 = 56.}$

b) N_2 de jurys comprenant seulement 3 hommes ; les deux autres sont des femmes ainsi :

$\boxed{N_2 = C_{10}^3 \times C_8^2 = 3360.}$

c) N_3 de jurys comprenant au moins 3 hommes. Cela veut dire que le jury peut comporter 3 hommes ou 4 hommes ou 5 hommes. On a donc $\boxed{N_3 = C_{10}^3 \times C_8^2 + C_{10}^4 \times C_8^1 + C_{10}^5 \times C_8^0 = 5292.}$

d) N_4 de jurys comprenant au plus 1 femme. Cela veut dire que le jury peut comporter 1 femme ou le jury peut être sans femme. On a ainsi : $\boxed{N_4 = C_8^1 \times C_{10}^4 + C_{10}^5 = 1932.}$

Exercice10

1- Soit N_1 le nombre d'itinéraires possibles

Pour la 1ère ville à visiter, on a 5choix. Pour la 2nde ville à visiter, on a 4 choix puisque les touristes ont déjà visité une ville.Et ainsi de suite.

	1ère	2ème	3ème	4ème	5ème
Nombre de choix	5	4	3	2	1

D'où $N_1 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$

Scanné avec CamScanner

2- Soit N_2 le nombre d'itinéraires tels que Ouaga est la $1^{ère}$ ville visitée

	$1^{ère}$	$2^{ème}$	$3^{ème}$	$4^{ème}$	$5^{ème}$
Nombre de choix	1	4	3	2	1

Ainsi $N_2=1\times4\times3\times2\times1=24$

3- Soit N_3 le nombre d'itinéraires tels que Bobo est la $2^{ème}$ ville visitée et Fada la $4^{ème}$ ville visitée

	$1^{ère}$	$2^{ème}$	$3^{ème}$	$4^{ème}$	$5^{ème}$
Nombre de choix	3	1	2	1	1

$N_3=3\times1\times2\times1\times1=6$

4- Soit N_4 le nombre d'itinéraires tels que la ville Bobo soit visitée avant la ville de Dori

Si Bobo est la $1^{ère}$ ville visitée, on aura : $1\times4\times3\times2\times1$ itinéraires

	$1^{ère}$	$2^{ème}$	$3^{ème}$	$4^{ème}$	$5^{ème}$
Nombre de choix	1	4	3	2	1

Si Bobo est la 2^{ndc} ville visitée, on aura : $3\times1\times3\times2\times1$ itinéraires

	$1^{ère}$	$2^{ème}$	$3^{ème}$	$4^{ème}$	$5^{ème}$
Nombre de choix	3	1	3	2	1

Si Bobo est la $3^{ème}$ ville visitée, on aura : $3\times2\times1\times2\times1$ itinéraires

	$1^{ère}$	$2^{ème}$	$3^{ème}$	$4^{ème}$	$5^{ème}$
Nombre de choix	3	2	1	2	1

Si Bobo est la $4^{ème}$ ville visitée, on aura : $3\times2\times1\times1\times1$ itinéraires

	$1^{ère}$	$2^{ème}$	$3^{ème}$	$4^{ème}$	$5^{ème}$
Nombre de choix	3	2	1	1	1

D'où $N_4=(1\times4\times3\times2\times1)+(3\times1\times3\times2\times1)+(3\times2\times1\times2\times1)+(3\times2\times1\times1\times1)=24+18+12+6=60$

Exercice11

1- Le nombre N_1 de podiums possibles

$N_1=8\times7\times6=A_8^3=336$.

2- Soit N_2 le nombre de podiums tels que HusseinBolt est premier

Le 1^{er} étant un jamaïcain et comme on a un seul jamaïcain, on a donc un seul choix.
Pour le $2^{ème}$, on a 7 choix et pour le $3^{ème}$, on a 6 choix. D'où $N_2=1\times7\times6=42$

3- Soit N_3 le nombre de podiums tels que les deux premiers sont des burkinabés

	1^{er}	$2^{ème}$	$3^{ème}$
Nombre de choix	2	1	6

$N_3=2\times1\times6=12$

Scanné avec CamScanner

4- Soit N_4 le nombre de podiums tels que 1^{er} coureur est américain et le $2^{ème}$ britannique

	1^{er}	$2^{ème}$	$3^{ème}$
Nombre de choix	3	2	6

$N_4=3\times2\times6=36$

Exercice12

Les êtres humains sont repartis suivant la composition du sang en quatre groupes : O, A, B, AB. Dans une assemblée de dix donneurs de sang quatre sont du groupe O trois du groupe A deux du groupe B et un du groupe AB. On choisit au hasard trois (3) personnes de l'assemblée.

1- Calculons le nombre N de choix possibles. $N = C_{10}^3 = 120$.

2- Calculons le nombre N_1 de choix où les trois personnes appartiennent au même groupe sanguin. On ne peut avoir que 3 de O et 3 de A. $N_1 = C_4^3 + C_3^3 = 5$.

3- Calculons le nombre N_2 de choix où deux personnes au moins appartiennent au même groupe sanguin. Cas où il y a 2 exactement qui appartiennent au même groupe sanguin. On a dans ce cas :

$$C_4^2 \times C_6^1 + C_3^2 \times C_7^1 + C_2^2 \times C_8^1 = 65$$

Cas où il y a 3 exactement qui appartiennent au même groupe sanguin. On a dans ce cas : N_1

Ainsi on a $N_2 = 65 + N_1 = 65 + 5 = 70$.

Exercice13

a) Soit N_1 le nombre de coloriages possibles

Pour la $1^{ère}$case , on a 3 couleurs donc 3 choix. Pour la $2^{ème}$ case, on a 2 choix car la couleur utilisée dans la $1^{ère}$ case ne sera pas utilisée. Pour la $3^{ème}$case , on a 2 choix car la couleur utilisée pour la $2^{ème}$ case ne sera pas utilisée mais la couleur utilisée pour la $1^{ère}$ case peut être utilisée ; ainsi de suite.

D'où $N_1=3\times2\times2\times2\times2\times2 = 96$

b) Soit N_2 le nombre de coloriages utilisant la couleur rouge et la couleur verte

	$1^{ère}$	$2^{ème}$	$3^{ème}$	$4^{ème}$	$5^{ème}$	$6^{ème}$
Nombres de choix	2	1	1	1	1	1

$N_2=2\times1\times1\times1\times1\times1=2$

c) Soit N_3 le nombre de coloriages qui utilisent deux des trois couleurs

En s'inspirant de b) avec les couleurs rouge et verte, on a 2 choix. Avec les couleurs rouge et jaune , on a aussi 2 choix. Il en a de même pour les couleurs verte et jaune. D'où $N_3= 2+2+2=6$

d) Soit N_4 le nombre de coloriages où la couleur jaune est utilisée une seule fois

- Si la $1^{ère}$ case est coloriée en jaune

	$1^{ère}$	$2^{ème}$	$3^{ème}$	$4^{ème}$	$5^{ème}$	$6^{ème}$
Nombres de choix	1	2	1	1	1	1

On a : 2 coloriages

- Si la $2^{ème}$ case est coloriée en jaune

	$1^{ère}$	$2^{ème}$	$3^{ème}$	$4^{ème}$	$5^{ème}$	$6^{ème}$
Nombres de choix	2	1	2	1	1	1

On a : 4 coloriages possibles

Scanné avec CamScanner

- Si la 3ème case est coloriée en jaune

	1ère	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème
Nombres de choix	2	1	1	2	1	1

On a : 4 coloriages possibles

- Si la 4ème case est coloriée en jaune

	1ère	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème
Nombres de choix	2	1	1	1	2	1

On a : 4coloriages

- Si la 5ème case est coloriée en jaune

	1ère	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème
Nombres de choix	2	1	1	1	1	2

On a : 4 coloriages possibles

- Si la 6ème case est coloriée en jaune

	1ère	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème
Nombres de choix	2	1	1	1	1	1

On a : 2 coloriages possibles

D'où $N_4 = 2+4+4+4+4+2 = 20$

Exercice14

Une caisse contient 9 pièces indiscernables au toucher numérotées de 1à 9.
Dans la caisse il y a 5 pièces impaires et 4 pièces paires.

1- On tire simultanément 3 pièces de la caisse

a) Le nombre de tirages possibles est : $C_9^3 = 84$.

b) Le nombre de tirages comportant au moins une pièce paire est : $C_4^1 \times C_5^2 + C_4^2 \times C_5^1 + C_4^3 = 74$.

2- On tire maintenant successivement 3 pièces avec remise

a) Le nombre de tirages possibles est : $9^3 = 729$.

b) Le nombre de tirages où la 1ère boule est paire est : $4 \times 9 \times 9 = 324$.

c) Le nombre de tirages comportant des pièces impaires seulement est : $5^3 = 125$

d) Le nombre de tirages comportant une seule pièce paire est : $(4 \times 5 \times 5) \times 3 = 300$

Exercice15

Dans une course de chevaux, il y a 15 partants dont 9 males et 6 femelles. Dans une arrivée, il n' y a pas d'ex aequo.

a) Le nombre de quartés (4 chevaux) dans l'ordre est : $A_{15}^4 = 15 \times 14 \times 13 \times 12$.

b) Le nombre de tiercés (3 chevaux) dans l'ordre est : $A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13$.

c) Le nombre de tiercés dans l'ordre composés uniquement de femelles est : $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$.

d) Le nombre de tiercés dans l'ordre où l'on a un seul male est : $(9 \times 6 \times 5) \times 3 = 810$.

e) Le nombre de tiercés dans l'ordre où le 1er cheval est male et 2ème femelle est : $(9 \times 6 \times 13) = 702$.

Scanné avec CamScanner

Chapitre 6 : Les Applications

Exercice 1

Soit h l'application définie par : $h : Z \to IN$, $k \mapsto k^2$

a) Soient $k_1 \in Z$ et $k_2 \in Z$ tels que $h(k_1) = h(k_2)$

$h(k_1) = h(k_2) \Leftrightarrow k_1^2 = k_2^2 \Rightarrow k_1 = k_2$ ou $k_1 = -k_2$ donc h n'est pas injective.

(On peut aussi remarquer par exemple que $-3 \neq 3$ or $h(-3) = 9$ et $h(3) = 9$ donc h n'est pas injective.)

b) h est surjective si chaque élément de IN a au moins un antécédent par h.

On a $2 \in IN$ qui n'a pas d'antécédent par h car c'est $(\sqrt{2})^2 = 2$ or $\sqrt{2} \notin Z$ donc h n'est pas surjective.

Exercice 2

Etudions l'injectivité et la surjectivité de chacune des applications ci-dessous

a) $f : IN \to Z$, $n \mapsto 2n - 3$

➢ injectivité

soit $n_1 \in IN$ et $n_2 \in IN$ tels que $f(n_1) = f(n_2)$.

$f(n_1) = f(n_2) \Leftrightarrow 2n_1 - 3 = 2n_2 - 3 \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$ donc f est injective.

➢ Surjectivité

f est surjective si l'équation $f(n) = m$ avec $m \in Z$ admet au moins une solution dans IN.

$f(n) = m \Leftrightarrow 2n - 3 = m \Rightarrow n = \frac{3+m}{2}$. Pour m pair, $\frac{3+m}{2} \notin$ IN (par exemple pour $m = 2$, on a : $n = \frac{5}{2}$) *donc* f n'est pas surjective.

b) $g : IR \to IR^+$, $x \mapsto x^2$

➢ surjectivité

g est surjective si l'équation $g(x) = y$ *pour* $y \in IR^+$ admet au moins une solution dans IR.

Soit $y \in IR^+$. $g(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y$ ainsi $x = \sqrt{y}$ *ou* $x = -\sqrt{y}$.

$\sqrt{y} \in IR$ *ou* $x = -\sqrt{y} \in IR$ donc g est surjective.

➢ Injectivité

Si $a \in IR$, *on a:* $-a \in IR$.

$g(a) = a^2$ *et* $g(-a) = a^2$ d'où $g(a) = g(-a)$ donc g n'est pas injective.

Scanné avec CamScanner

c) .

$$h: IR^- \to IR^+$$
$$x \mapsto x^2$$

soit $y \in IR^+$. Résolvons dans IR^- l'équation $h(x) = y$.

$h(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \Leftrightarrow x^2 = y$ d'où $x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$.

$\sqrt{y} \notin IR^-$ et $-\sqrt{y} \in IR^-$ donc l'équation $h(x) = y$ admet une seule solution dans IR^- ainsi h est bijective donc h est injective et surjective.

d) $j: IR \to Z$, $x \mapsto E(x)$ où E(x) est la partie entière de x.

- Injectivité

On a : $E(4,5) = E(4,8) = 4$ mais $4,5 \neq 4,8$ donc j n'est pas injective.

- Surjectivité

Soit $n \in Z$. Résolvons $E(x) = n$.

$E(x) = n \Rightarrow x \in [n; n+1[\subset IR$ donc j est surjective.

Exercice 3

Soit l'application $g: IR \to [0; +\infty[$

$$x \mapsto g(x) = |x|$$

a) Montrons que g est surjective.

Soit $y \in [0; +\infty[$; résolvons $g(x) = y$.

$g(x) = y \Leftrightarrow |x| = y \vdash\!\dashv x = y$ ou $x = -y$ or $y \in IR$ et $-y \in IR$ donc g est surjective

b) Montrons que g n'est pas injective.

$1 \in IR$ et $-1 \in IR$ $(-1 \neq 1)$; on a $g(-1) = g(1) = 1$ donc g n'est pas injective.

c) Trouvons un autre ensemble de départ pour que g soit bijective.

On peut considérer $[0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0]$ comme ensemble de départ pour que g soit bijective.

Exercice 4

Montrons que chacune des applications est bijective et déterminons sa bijection réciproque.

a) $f:]-\infty; -3] \longrightarrow [1; +\infty[$

$$x \longmapsto f(x) = x^2 + 6x + 10$$

Scanné avec CamScanner

- Montrons que f est bijective.

f est bijective si l'équation $f(x) = y$ $avec$ $y \in [1;+\infty[$ a une seule solution dans $]-\infty;-3]$.

$$f(x) = y \vdash\!\dashv x^2 + 6x + 10 = y \vdash\!\dashv (x+3)^2 - 9 + 10 = y \vdash\!\dashv (x+3)^2 + 1 = y$$

$$\vdash\!\dashv (x+3)^2 = y - 1 \text{ comme } y \in [1;+\infty[\text{ alors } (y-1) \in [0;+\infty[\vdash\!\dashv (y-1) \geq 0$$

Ainsi

$$(x+3)^2 = y - 1 \vdash\!\dashv x + 3 = \sqrt{y-1} \ \ ou \ \ x + 3 = -\sqrt{y-1} \vdash\!\dashv x = -3 - \sqrt{y-1} \ ou$$

$x = -3 + \sqrt{y-1}$.

On a :

$$(y-1) \geq 0 \vdash\!\dashv \sqrt{y-1} \geq 0 \vdash\!\dashv -3 + \sqrt{y-1} \geq -3 \vdash\!\dashv (-3+\sqrt{y-1}) \in [-3;+\infty[$$

On a : $(y-1) \geq 0 \vdash\!\dashv \sqrt{y-1} \geq 0 \vdash\!\dashv -\sqrt{y-1} \leq 0 \vdash\!\dashv -3 - \sqrt{y-1} \leq -3 \vdash\!\dashv$
$(-3-\sqrt{y-1}) \in]-\infty;-3]$

$d'où$ l'équation $f(x) = y$ a une solution dans $]-\infty;-3]$ qui est $x = -3 - \sqrt{y-1}$ donc f est bijective.

- Déterminons la bijection réciproque de f.

Comme $f:]-\infty;-3] \longrightarrow [1;+\infty[$ est bijective alors f admet une bijection réciproque $f^{-1} : [1;+\infty[\longrightarrow]-\infty;-3]$.

posons : $y = f(x) \vdash\!\dashv x = f^{-1}(y)$ or on vient de montrer que $x = -3 - \sqrt{y-1} \vdash\!\dashv$ $f^{-1}(y) = -3 - \sqrt{y-1}$ donc $f^{-1} : [1;+\infty[\longrightarrow]-\infty;-3]$

$$x \longmapsto f^{-1}(x) = -3 - \sqrt{x-1}$$

b) $g:]-\infty;0[\longrightarrow]-2;+\infty[$

$$x \longmapsto \frac{2x+1}{-x}$$

- Montrons que g est bijective

g est bijective si l'équation g(x) = y avec $y \in]-2;+\infty[$ a une seule solution dans $]-\infty;0[$.

$$g(x) = y \vdash\!\dashv \frac{2x+1}{-x} = y \vdash\!\dashv -2 - \frac{1}{x} = y \vdash\!\dashv \frac{1}{x} = -2 - y \text{ comme } y \in]-2;+\infty[\vdash\!\dashv - y \in]-\infty;2[$$

Scanné avec CamScanner

$\vdash(-2-y) \in]-\infty;0[\vdash(-2-y) < 0 \vdash (-2-y) \neq 0.$

$\frac{1}{x} = -2-y \vdash x = \frac{1}{-y-2}$. On a : $(-2-y) < 0 \vdash \frac{1}{-y-2} < 0 \vdash x < 0 \vdash x \in]-\infty;0[$ d'où l'équation $g(x) = y$ a une seule solution dans $]-\infty;0[$ qui est $x = \frac{1}{-y-2}$ donc g est bijective.

- Déterminons la bijection réciproque de g.

Comme $g:]-\infty;0[\longrightarrow]-2;+\infty[$ est bijective alors g admet une bijection réciproque $g^{-1}:]-2;+\infty[\longrightarrow]-\infty;0[$

Posons : $y = g(x) \vdash x = g^{-1}(y)$. On vient de montrer que $x = \frac{1}{-y-2} \vdash g^{-1}(y) = \frac{1}{-y-2}$ donc $x \mapsto g^{-1}(x) = \frac{1}{-x-2} = -\frac{1}{x+2}$

Exercice 5

1) soit k l'application définie par $k(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$. Trouvons $f(x); g(x)$ expressions de deux(2) applications pour que $k(x) = (fOg)(x)$.

On a par exemple : $f(x) = \frac{1-x}{2+x}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

2) Soit j l'application définie par $j(x) = \sqrt{3+cos^2 x}$. Trouvons $f(x); g(x) et\ h(x)$ expressions de trois(3) applications pour que $j(x) = (fOgOh)(x)$.

On a par exemple : $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 3 + x^2$ et $h(x) = cosx$

Chapitre 7 : Limites

Exercice1

1- Calculons la limite de la fonction f en $+\infty$

a) $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

b) $f(x) = x - \sqrt{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x - \sqrt{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

c) $f(x) = -3\sqrt{2}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -3\sqrt{2} = -3\sqrt{2}$

Scanné avec CamScanner

d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{1+x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-1}{1+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}(1-\frac{1}{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=0$

car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

2- Calculons la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$

a) $f(x)=2x^2-5x+3$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2-5x+3=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^2-5x+3=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^2=+\infty$

b) $f(x)=5x^3+x^2-40x+123874$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}5x^3+x^2-40x+123874=\lim\limits_{x\to+\infty}5x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}5x^3+x^2-40x+123874=\lim\limits_{x\to-\infty}5x^3=-\infty$

c) $f(x)=-x\sqrt{2}+1$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-x\sqrt{2}+1=\lim\limits_{x\to+\infty}-x\sqrt{2}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-x\sqrt{2}+1=\lim\limits_{x\to-\infty}-x\sqrt{2}=+\infty$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

e) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x\sqrt{2}-2}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x\sqrt{2}-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{x\sqrt{2}-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

f) $f(x)=\dfrac{x+6}{4-x^2}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+6}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{-x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+6}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-x}=0$

g) $f(x)=\dfrac{4-5x}{2x+3}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4-5x}{2x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5x}{2x}=-\dfrac{5}{2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4-5x}{2x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-5x}{2x}=-\dfrac{5}{2}$

h) $f(x)=\dfrac{2(x-2)^2+1}{3-5x^3}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2(x-2)^2+1}{3-5x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-8x+9}{3-5x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{-5x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{-5x}=0$

Scanné avec CamScanner

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2(x-2)^2+1}{3-5x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-8x+9}{3-5x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{-5x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{-5x} = 0$$

i) $f(x) = \dfrac{x^3-7x^2+2x-11}{x^2-14x+3}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-7x^2+2x-11}{x^2-14x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-7x^2+2x-11}{x^2-14x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

Exercice2

Etudions la limite de f en a

(on calculera éventuellement les limites à gauche et à droite de a)

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}; a = 1$. $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x+2}{x-1} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to1^+} x+2 = 3$ et $\lim\limits_{x\to1^+} x-1 = 0^+$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x+2}{x-1} = -\infty \text{ car } \lim_{x\to1^-} x+2 = 3 \text{ et } \lim_{x\to1^-} x-1 = 0^-$$

b) $f(x) = \dfrac{1-2x}{x+2}; a = -2$. $\lim\limits_{x\to(-2)+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-2)+} \dfrac{1-2x}{x+2} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to(-2)+} (1-2x) = 5$ et $\lim\limits_{x\to(-2)+} x-(-2) = 0^+$

$$\lim_{x\to(-2)-} f(x) = \lim_{x\to(-2)-} \frac{1-2x}{x+2} = -\infty \text{ car } \lim_{x\to(-2)-} (1-2x) = 5 \text{ et } \lim_{x\to(-2)-} x-(-2) = 0^-$$

c) $f(x) = \dfrac{-2}{(3-x)^2}; a = 3$. $\lim\limits_{x\to3+} f(x) = \lim\limits_{x\to3+} \dfrac{-2}{(3-x)^2} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to3+} (3-x)^2 = 0+$

$$\lim_{x\to3-} f(x) = \lim_{x\to3-} \frac{-2}{(3-x)^2} = -\infty \text{ car } \lim_{x\to3-} (3-x)^2 = 0+$$

d) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4}; a = 2$ $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4} = \dfrac{(x+3)}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{x+3}{x+2} \times \dfrac{1}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x+3}{x+2} = \dfrac{5}{4}$; $\lim\limits_{x\to2+} x-2 = 0+$; $\lim\limits_{x\to2-} x-2 = 0-$ d'où : $\lim\limits_{x\to2-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to2+} f(x) = +\infty$

e) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}; a = 2$. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4} = \dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{1}{x+2}$ pour $x \neq 2$; donc : $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \dfrac{1}{4}$

f) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2}; a = 4$

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2} = \frac{(\sqrt{x})^3-2^3}{\sqrt{x}-2} = \frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}-2} = x+2\sqrt{x}+4$$

pour $x \neq 4$ $\lim\limits_{x\to4} f(x) = \lim\limits_{x\to4} x+2\sqrt{x}+4 = 12$

g) $f(x) = \dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6}; a = 3$ $f(x) = \dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6} = \dfrac{(x-3)(2x-1)}{(x-3)(x+2)} = \dfrac{2x-1}{x+2}$

Scanné avec CamScanner

pour $x \neq 3$ $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x-1}{x+2} = 1$

h) $f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}; a = 1$ $\quad f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1} = \dfrac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x+4}{x+1}$

pour $x \neq 1$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+4}{x+1} = \dfrac{5}{2}$

i) $f(x) = \dfrac{4}{x^2-4} - \dfrac{1}{x-2}; a = 2$ $\quad f(x) = \dfrac{4}{x^2-4} - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{4}{x^2-4} - \dfrac{x+2}{x^2-4} = \dfrac{2-x}{x^2-4} = -\dfrac{1}{x+2}$

pour $x \neq 2$ et $x \neq -2$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-1}{x+2} = -\dfrac{1}{4}$

j) $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)} + \dfrac{1}{x}; a = 0$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x(x-1)} + \dfrac{x-1}{x(x-1)} = \dfrac{x}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x-1}$

pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x-1} = -1$

k) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}; a = 1$ Pour $x \succ 0$ et $x \neq 1$; on a $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \sqrt{x}+1$;

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x}+1 = 2$

l) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}; a = 3$ pour $x \neq 3$ et $x \succ -1 \Rightarrow$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \dfrac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}$ et $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \dfrac{1}{4}$

m) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}; a = 0$.

pour $x \neq 0$; $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1} = \dfrac{x(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{x} = (\sqrt{1+x^2}+1) \times \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1+x^2}+1 = 2$ donc $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\infty$

Exercice3

Calculons les limites de fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

a) $f(x) = \sqrt{2x^2-x+1} + x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-x+1} = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2-x+1 = +\infty$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

Scanné avec CamScanner

$f(x)=\sqrt{2x^2-x+1}+x=|x|\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x$; pour $x\prec 0$, on a :

$f(x)=-x\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x=-x(\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1)=(\sqrt{2}-1)$

car : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

b) $f(x)=\sqrt{x^2+3x+1}-x$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-x+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$

Pour $x\succ 0$; $f(x)=\sqrt{x^2+3x+1}-x=\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+1}+x}=\frac{x(3+\frac{1}{x})}{x\left[\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right]}=\frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}3+\frac{1}{x}=3$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1=2$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{3}{2}$

c) $f(x)=x+2+\sqrt{x^2-3x+1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}x+2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+1}=+\infty$

$f(x)=x+2+\sqrt{x^2-3x+1}=\frac{(x+2)^2-(x^2-3x+1)}{(x+2)-\sqrt{x^2-3x+1}}=\frac{7x+3}{x+2-\sqrt{x^2-3x+1}}$;

Pour $x\prec 0$, on a : $f(x)=\frac{x\left[7+\frac{3}{x}\right]}{x\left[1+\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]}=\frac{7+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}7+\frac{3}{x}=7$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}1+\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=2$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\frac{7}{2}$

d) $f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}$

$f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{x(1-\frac{1}{x})}{|x|\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]}$ avec $x\neq 0$

Pour $x\succ 0$; $f(x)=\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

Scanné avec CamScanner

Pour $x \prec 0$; $f(x) = -\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{3x-1}$; $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{3x-1} = \dfrac{|x|\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}}{x(3-\dfrac{1}{x})}$ avec $x \neq 0$

Pour $x \succ 0$; $f(x) = \dfrac{\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}}{(3-\dfrac{1}{x})}$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$

Pour $x \prec 0$; $f(x) = -\dfrac{\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}}{(3-\dfrac{1}{x})}$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{4x^2+3}}$; $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{4x^2+3}} = \sqrt{\dfrac{x^2+2x-3}{4x^2+3}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{4x^2+3} = \dfrac{1}{4} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{4x^2+3}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

g) $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x^2-3x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$

Pour $x \succ 0$; $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x^2-3x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}} = \dfrac{x(1-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}})}{x(2+\sqrt{4+\dfrac{1}{x}})} = \dfrac{1-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{2+\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}}$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1-1}{2} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$

Pour $x \prec 0$;

$f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x^2-3x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}} = \dfrac{\left[x-\sqrt{x^2-3x+1}\right]\left[2x-\sqrt{4x^2+x}\right]}{-x} = -\left[1+\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right]\left[2x-\sqrt{4x^2+x}\right]$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Scanné avec CamScanner

Exercice4

Calculer les limites de fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

a) $f(x)=x-\sin x$; pour tout $x\in IR$; $-1\le -\sin x\le 1 \Rightarrow x-1\le x-\sin x\le x+1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x-1=\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

b) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2+1}$; pour tout $x\in IR$; $-1\le\cos x\le 1\Rightarrow -\dfrac{1}{x^2+1}\le\dfrac{\cos x}{1+x^2}\le\dfrac{1}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

c) $f(x)=x\sqrt{1+\sin^2 x}$

Pour $x\succ 0$; $x\sqrt{1+\sin^2 x}\ge x$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Pour $x\prec 0$; $x\sqrt{1+\sin^2 x}\le x$ or $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

d) $f(x)=\sqrt{x^2+\cos^2 x}$

pour tout $x\in IR$; $\sqrt{x^2}\le\sqrt{x^2+\cos^2 x}\le\sqrt{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

e) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sin^2 x+2}$

pour tout $x\in IR$; $f(x)\ge\dfrac{x-1}{3}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{3}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Pour tout $x\in IR$; $f(x)\le\dfrac{x-1}{2}$ or $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{3}=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

f) $f(x)=\dfrac{x}{2-\sin(\frac{1}{x})}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2-\sin(\frac{1}{x})}=+\infty$ de même $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2-\sin(\frac{1}{x})}=-\infty$

g) $f(x)=\dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$; $f(x)=\dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}=\dfrac{1+\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}$ pour $x\neq 0$

Scanné avec CamScanner

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$

Exercice5

Calculons la limite de f en 0.

a) $f(x)=\frac{\sin 2x}{3x}$; $f(x)=\frac{\sin 2x}{3x}=\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{2}{3}$; or $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}=1$ donc $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x}=\frac{2}{3}$

b) $f(x)=\frac{\sin 4x}{5x}$; de même qu'au a) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{5x}=\frac{4}{5}$

c) $f(x)=\frac{1-Cos4x}{4x^2}$; Posons $X=4x\Rightarrow x=\frac{X}{4}$. quand $x\to0$ alors $X\to0$

$\lim_{x\to0}\frac{1-Cos4x}{4x^2}=\lim_{X\to0}\frac{1-\cos X}{4(\frac{X}{4})^2}=\lim_{X\to0}4\frac{1-\cos X}{X^2}=4\times\frac{1}{2}=2$ car $\lim_{X\to0}\frac{1-\cos X}{X^2}=\frac{1}{2}$

d) $f(x)=\frac{x}{\sin x}$; $f(x)=\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$ or $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ donc $\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$

e) $f(x)=\frac{\sin 2x}{x}+\cos 2x$; $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=2$ et $\lim_{x\to0}cos2x=1$ donc $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}+\cos 2x=3$

f) $f(x)=\frac{\tan x}{x}$; $f(x)=\frac{\tan x}{x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\frac{\sin x}{x\cos x}=\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}$

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ et $\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1$ donc $\lim_{x\to0}f(x)=1\times1=1$

g) $f(x)=\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

$f(x)=\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}}$; $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=2$ et $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=3$ donc $\lim_{x\to0}f(x)=\frac{2}{3}$

h) $f(x)=\frac{\tan 3x}{\tan 5x}$; $f(x)=\frac{\tan 3x}{\tan 5x}=\frac{\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\tan 5x}{x}}$; $\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}\times\frac{1}{\cos 3x}=3$ et :

$\lim_{x\to0}\frac{\tan 5x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}\times\frac{1}{\cos 5x}=5$ donc $\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{\tan 5x}=\frac{3}{5}$

i) $f(x)=\frac{\sin 2x}{x\cos x}$

$f(x)=\frac{\sin 2x}{x\cos x}=\frac{\sin 2x}{x}\times\frac{1}{\cos x}$; $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=2$ et $\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1$ donc $\lim_{x\to0}f(x)=2$

Scanné avec CamScanner

2) Calculons :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\dfrac{x\sin x}{x^2}}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}\right)=2$. car

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1-\sin x}{\left[2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\dfrac{1-\sin x}{4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}\right]$.

Procédons par un changement de variable en posant : $X=\dfrac{\pi}{2}-x$.

Quand $x\to\dfrac{\pi}{2}$; $X\to 0$. On a : $X=\dfrac{\pi}{2}-x\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}-X$

Ainsi $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\dfrac{1-\sin x}{4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}\right]=\lim\limits_{X\to 0}\left[\dfrac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-X\right)}{4(X)^2}\right]=\lim\limits_{X\to 0}\left[\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1-\cos X}{X^2}\right]=\dfrac{1}{8}$ car $\lim\limits_{X\to 0}\left(\dfrac{1-\cos X}{X^2}\right)=\dfrac{1}{2}$ donc

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2}\right)=\dfrac{1}{8}$.

Exercice6

1- Soit h la fonction définie par $h(x)=-3x^3+5x-4$

a) Déterminons le domaine de définition Dh de h $Dh=IR$ car $h(x)$ est un polynôme $Dh=]-\infty;+\infty[$

b) Calculons les limites de h aux bornes de Dh $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-3x^3+5x-4=\lim\limits_{x\to-\infty}-3x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-3x^3+5x-4=\lim\limits_{x\to+\infty}-3x^3=-\infty$

2- Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$

a) Déterminons le domaine de définition Df de f.

f existe si $x-1\neq 0$; $x\neq 0\Rightarrow x\neq 1$; Df $=$ IR- $\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

b) Calculons les limites de f aux bornes de Df

Scanné avec CamScanner

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1-} \frac{x-2}{x-1} = +\infty \text{ car } \lim_{x\to1-} x-2 = -1 \text{ et } \lim_{x\to1-} x-1 = 0-$$

$$\lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1+} \frac{x-2}{x-1} = -\infty \text{ car } \lim_{x\to1+} x-2 = -1 \text{ et } \lim_{x\to1+} x-1 = 0+$$

3- Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x+3}{4-x^2}$

a) Déterminons le domaine de définition Dg de g. g existe si $4 - x^2 \neq 0$

$4 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ et $x \neq -2$ d'où $Df = IR - \{-2;2\} =]-\infty;-2[U]-2;2[U]2;+\infty[$

b) Calculons les limites de g aux bornes de Dg

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{4-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{4-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-x} = 0$$

$$g(x) = \frac{x+3}{4-x^2} = \frac{x+3}{2-x} \times \frac{1}{2+x}$$

$$\lim_{x\to-2-} g(x) = -\infty \quad \text{car } \lim_{x\to-2-} \frac{x+3}{2-x} = \frac{1}{4} \text{ et } \lim_{x\to-2-} 2+x = 0-$$

$$\lim_{x\to-2+} g(x) = +\infty \quad \text{car } \lim_{x\to-2+} \frac{x+3}{2-x} = \frac{1}{4} \text{ et } \lim_{x\to-2+} 2+x = 0+$$

$$g(x) = \frac{x+3}{x+2} \times \frac{1}{2-x}$$

$$\lim_{x\to2-} g(x) = +\infty \quad \text{car } \lim_{x\to2-} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4} \text{ et } \lim_{x\to2-} (2-x) = 0+$$

$$\lim_{x\to2+} g(x) = -\infty \quad \text{car } \lim_{x\to2+} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4} \text{ et } \lim_{x\to2-} (2-x) = 0-$$

Chapitre 8 : Dérivation

Exercice 1

Donnons l'expression de la dérivée de la fonction f dans chacun des cas :

1) $f(x) = x + 125 \rightarrow f'(x) = x' + 125' = 1$; 2) $f(x) = \sqrt{5} \rightarrow f'(x) = 0$

3) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 11x - 1 \rightarrow f'(x) = (4x^3)' - (2x^2)' + (11x)' - (1)' = 12x^2 - 4x + 11$

4) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x - 3 \rightarrow f'(x) = \frac{3}{4}(x^4)' + \frac{2}{3}(x^3)' - \frac{1}{2}(x)' - 3' = 3x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}$

Scanné avec CamScanner

5) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+3}$ → $f'(x)=(\dfrac{2x+3}{x+3})'=\dfrac{(2x+3)'(x+3)-(2x+3)(x+3)'}{(x+3)^2}=\dfrac{2(x+3)-(2x+3)}{(x+3)^2}=\dfrac{3}{(x+3)^2}$

6) $f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2}$

$f'(x)=(\dfrac{2x+2}{x^2+2})'=\dfrac{(2x+2)'(x^2+2)-(x^2+2)'(2x+2)}{(x^2+2)^2}=\dfrac{2(x^2+2)-2x(2x+2)}{(x^2+2)^2}=\dfrac{-2x^2-4x+4}{(x^2+2)^2}$

Exercice 2

Donnons l'expression de la dérivée de la fonction f dans chacun des cas :

1) $f(x)=2x\sqrt{x^2+1}$ → $f'(x)=(2x\sqrt{x^2+1})'=(2x)'\sqrt{x^2+1}+(\sqrt{x^2+1})'(2x)=2\sqrt{x^2+1}+\dfrac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}(2x)$

$f'(x)=2\sqrt{x^2+1}+\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{2(x^2+1)+2x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{4x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$

2) $f(x)=(2x-\sqrt{x})^4$ → $f'(x)=[(2x-\sqrt{x})^4]'=4(2x-\sqrt{x})'(2x-\sqrt{x})^3=4(2-\dfrac{1}{2\sqrt{x}})(2x-\sqrt{x})^3$

$f'(x)=\dfrac{2(4\sqrt{x}-1)(2x-\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}$

3) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x+1}}{x-2}$

$f'(x)=[\dfrac{x\sqrt{x+1}}{x-2}]'=\dfrac{[x\sqrt{x+1}]'(x-2)-(x-2)'(x\sqrt{x+1})}{(x-2)^2}=\dfrac{[\sqrt{x+1}+x\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}](x-2)-x\sqrt{x+1}}{(x-2)^2}$

$f'(x)=\dfrac{(3x+2)(x-2)-2x(x+1)}{2(x-2)^2\sqrt{x+1}}=\dfrac{x^2-6x-4}{2(x-2)^2\sqrt{x+1}}$

4) $f(x)=x^2+1+\sqrt{x}$ → $f'(x)=[x^2+1+\sqrt{x}]'=2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{4x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$

5) $f(x)=(2x^2-1)^2(3x+1)^4$

$f'(x)=[(2x^2-1)^2(3x+1)^4]'=[(2x^2-1)^2]'[(3x+1)^4]+(2x^2-1)^2[(3x+1)^4]'$

$f'(x)=8x(2x^2-1)(3x+1)^4+12(3x+1)^3(2x^2-1)^2=(3x+1)^3(2x^2-1)[8x(3x+1)+12(2x^2-1)]$

$f'(x)=4(3x+1)^3(2x^2-1)(12x^2+2x-3)$

Exercice 3

Donnons l'expression de la dérivée de la fonction f dans chacun des cas :

1) $f(x)=\tan x$ → $f'(x)=(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

2) $f(x)=\cos x\sin^2 x$

Scanné avec CamScanner

$f'(x)=[\cos x\sin^2 x]'=(\cos x)'\sin^2 x+\cos x[\sin^2 x]'=-\sin^3 x+2\sin x\cos^2 x$

3) $f(x)=(\sin^4 x)\tan x$

$f'(x)=[(\sin^4 x)\tan x]'=[\sin^4 x]'\tan x+(\tan x)'\sin^4 x=4\cos x\sin^3 x\tan x+\dfrac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$

$f'(x)=4\cos x\sin^4 x\times\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{\sin^4 x}{\cos^2 x}=\dfrac{4\cos^2 x\sin^4 x+\sin^4 x}{\cos^2 x}=\dfrac{\sin^4 x(4\cos^2 x+1)}{\cos^2 x}$

4) $f(x)=\dfrac{1-3\cos 3x}{2-\cos 3x}$

$f'(x)=[\dfrac{1-3\cos 3x}{2-\cos 3x}]'=\dfrac{(1-3\cos 3x)'(2-\cos 3x)-(2-\cos 3x)'(1-3\cos 3x)}{(2-\cos 3x)^2}$

$f'(x)=\dfrac{9\sin 3x(2-\cos 3x)-3\sin 3x(1-3\cos 3x)}{(2-\cos 3x)^2}=\dfrac{15\sin 3x}{(2-\cos 3x)^2}$

5) $f(x)=\cos(2x-\dfrac{\pi}{3})\rightarrow f'(x)=[\cos(2x-\dfrac{\pi}{3})]'=-(2x-\dfrac{\pi}{3})'\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})=-2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$

6) $f(x)=\sin(\dfrac{\pi}{4}-3x)\rightarrow f'(x)=[\sin(\dfrac{\pi}{4}-3x)]'=[\dfrac{\pi}{4}-3x]'\cos(\dfrac{\pi}{4}-3x)=-3\cos(\dfrac{\pi}{4}-3x)$

7) $f(x)=\sin^2 x+3\cos x\rightarrow f'(x)=[\sin^2 x+3\cos x]'=2\sin x\cos x-3\sin x=2\sin x(\cos x-\dfrac{3}{2})$

8) $f(x)=\tan^2(\dfrac{\pi}{6}-2x)$

$f'(x)=[\tan^2(\dfrac{\pi}{6}-2x)]'=2[\tan(\dfrac{\pi}{6}-2x)]'\tan(\dfrac{\pi}{6}-2x)=2(\dfrac{\pi}{6}-2x)'[1+\tan^2(\dfrac{\pi}{6}-2x)]\tan(\dfrac{\pi}{6}-2x)$

$f'(x)=-4[1+\tan^2(\dfrac{\pi}{6}-2x)]\tan(\dfrac{\pi}{6}-2x)$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$.

1- Déterminons le domaine de définition de f et calculons les limites aux bornes du domaine de définition.

f existe si $x-2\neq 0$. $x-2\neq 0\Rightarrow x\neq 2$. $D_f=\ ]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ les limites de f aux bornes de D_f.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-3}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ de même $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to 2-}x^2-3=1$ et $\lim\limits_{x\to 2-}x-2=0-$

$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to 2+}x^2-3=1$ et $\lim\limits_{x\to 2+}x-2=0+$

2- Calcul de f'(x).

$f'(x)=\dfrac{(x^2-3)'(x-2)-(x-2)'(x^2-3)}{(x-2)^2}=\dfrac{2x(x-2)-(x^2-3)}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$

déterminons son signe Le signe de $f'(x)$ dépend de $(x-1)(x-3)$

Scanné avec CamScanner

x	$-\infty$		1		2		3	$+\infty$
$(x-1)(x-3)$	$+$		0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$		0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$

3- Etudions les variations de f

- pour $x \in]-\infty;1[$; $f'(x) \succ 0 \Rightarrow f$ est croissante
- pour $x \in]1;2[$; $f'(x) \prec 0 \Rightarrow f$ est décroissante
- pour $x \in]2;3[$; $f'(x) \prec 0 \Rightarrow f$ est décroissante
- pour $x \in]3;+\infty[$; $f'(x) \succ 0 \Rightarrow f$ est croissante

dressons son tableau de variation :

x	$-\infty$		1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↘	6	↗ $+$

Exercice 5

Soit a et b deux réels. On considère la fonction f définie par : $f(x) = ax + b + \dfrac{1}{3-x}$

1- Calculons les réels a et b sachant que $f(2) = 2$ et $f'(2) = 0$ $\quad f(2) = 2a + b + 1 = 2$

$$f'(x) = a + \frac{1}{(3-x)^2} \; ; \; f'(2) = a + 1 = 0 \qquad \begin{cases} 2a + b = 1 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1 et b = 3$$

2-Déterminons l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 2.

(T) : $y = f'(2)(x-2) + f(2) = f(2)$ puisque $f'(2) = 0$

(T) : $y = 2$ ((T) est une tangente horizontale)

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur IR-$\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x-2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal. On a $f'(x) = \dfrac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x-2)^2}$

pour a) ;on a $f(0) = 5 \Rightarrow \dfrac{c}{-2} = 5 \Rightarrow c = -10$

pour b) ; on a : $f'(0) = 0 \Rightarrow \dfrac{-2b - c}{4} = 0 \Rightarrow b = 5$

pour c) ; on a : $f'(1) = -3 \Rightarrow a - 4a - 2b - c = -3 \Rightarrow -3a - 2b - c = -3 \Rightarrow a = 1$

on a : $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 10}{x-2}$

2- Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

Scanné avec CamScanner

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+5x-10}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to2-} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x\to2-} x^2+5x-10 = 4 \text{ et } \lim_{x\to2-} x-2 = 0-$$

$$\lim_{x\to2+} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to2+} x^2+5x-10 = 4 \text{ et } \lim_{x\to2+} x-2 = 0+$$

3- Calculons $f'(x)$ et étudions les variations de f.

$$f'(x) = [\frac{x^2+5x-10}{x-2}]' = \frac{(x^2+5x-10)'(x-2)-(x-2)'(x^2+5x-10)}{(x-2)^2} = \frac{(2x+5)(x-2)-(x^2+5x-10)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ dépend de $x(x-4)$. Dressons le tableau de signe.

x	$-\infty$	0		2		4	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	||	-	0	+

- pour $x \in]-\infty;0[$; $f'(x) \succ 0 \Rightarrow f$ est croissante
- pour $x \in]0;2[$; $f'(x) \prec 0 \Rightarrow f$ est décroissante
- pour $x \in]2;4[$; $f'(x) \prec 0 \Rightarrow f$ est décroissante
- pour $x \in]4;+\infty[$; $f'(x) \succ 0 \Rightarrow f$ est croissante

4- Dressons le tableau de variation de f.

f	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
f'(x)	+		0	-	||	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	5	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	13	↗	$+\infty$

Exercice 7 :

Soit a, b deux nombres réels. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$

a) Calculons $f'(x)$ $Df = \mathbb{R}$

$$f'(x) = [\frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}]' = \frac{(3x^2+ax+b)'(x^2+1)-(x^2+1)'(3x^2+ax+b)}{(x^2+1)^2} = \frac{(6x+a)(x^2+1)-2x(3x^2+ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-ax^2+x(6-2b)+a}{(x^2+1)^2}$$

b) Déterminons a, b pour que la représentation graphique de f passe par A(O, 3) et admet en ce point A une tangente d'équation $y = 4x+3$. On a donc : $f(0) = 3$ et $f'(0) = 4$.

Scanné avec CamScanner

$f(0)=3 \Rightarrow b=3$; $f'(0)=4 \Rightarrow a=4$ donc : $f(x)=\dfrac{3x^2+4x+3}{(x^2+1)} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}$

c) Etudions les variations de f et dressons son tableau de variation.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+4x+3}{(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$ aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

le signe de $f'(x)$ dépend de $-4x^2+4$

pour $x\in\left]-\infty;-1\right[$; $f'(x)\prec 0$ donc f est décroissante

pour $x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$; $f'(x)\succ 0$ donc f est croissante

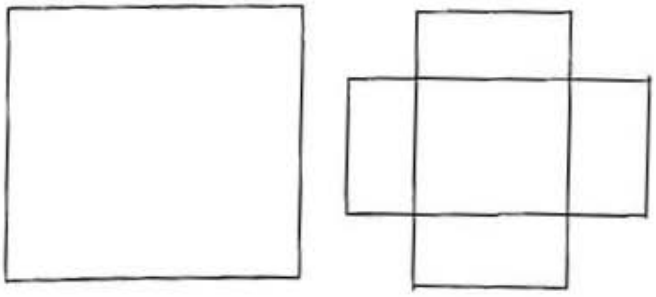
pour $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$; $f'(x)\prec 0$ donc f est décroissante

Dressons le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	↘	1	↗	5	↘	3

Exercice 8

On dispose d'une feuille de carton carré de côté 100cm. Aux quatre coins de cette feuille on découpe un carré de côté x cm puis on plie le morceau restant pour obtenir une boite sans couvercle.



1-a) Précisons l'ensemble de valeurs possibles x.

On a : $x\in\left]0;50\right[$

b) Démontrer que $v(x)=x(100-2x)^2$

- la base est un carré de côté *(100-2x)* donc la surface de base est $(100-2x)^2$.
- la hauteur est x.
- le volume de la boite est donc $x(100-2x)^2$.

2-On désigne par $v(x)$ le volume de cette boîte, exprimé en cm^3.

a) Etudions le sens de variation de la fonction V ainsi obtenue

$v(x)=x(100-2x)^2 \Rightarrow v'(x)=x'(100-2x)^2+x[(100-2x)^2]'=(100-2x)(100-6x)$

$v(x)=50 \Rightarrow x=50 ou x=\dfrac{50}{3}$

pour $x\in\left]0;\frac{50}{3}\right[$; $v'(x)\succ 0$ donc v est croissante

pour $x\in\left]\frac{50}{3};50\right[$; $v'(x)\prec 0$ donc v est décroissante.

Scanné avec CamScanner

Dressons son tableau de variation.

x	0		$\frac{50}{3}$		50
$v'(x)$		$+$	0	$-$	
$v(x)$	0	↗	$\frac{2\times10^6}{27}$	↘	0

3- Calculer le volume maximum.

Le volume est maximum pour $x = \frac{50}{3}$ cm d'où le volume maximum est $V = \frac{2\times10^6}{27}$ cm^3.

Exercice 9

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin^2 x + \cos x$

1- Montrons que $f'(x) = 2\sin x(\cos x - \frac{1}{2})$ f'(x) = (sin²x + cosx)' = $2\sin x\cos x - \sin x = 2\sin x(\cos x - \frac{1}{2})$

2- Etudions les variations de f sur [0 ;Π]

Pour $x \in [0;\pi]$, $\sin x \geq 0$ donc le signe de f'(x) dépend de $(\cos x - \frac{1}{2})$

pour $x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]; \cos x \geq \frac{1}{2}$ d'où $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante

pour $x \in \left[\frac{\pi}{3};\pi\right]; \cos x \leq \frac{1}{2}$ d'où $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante

3- Dresser le tableau de variation de f sur [0 ;Π].

x	0		$\pi/3$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	1	↗	$5/4$	↘	-1

Scanné avec CamScanner

Chapitre 8 : Etude de fonctions

Problème1

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$

1- Déterminons le domaine de définition D de f. $D = IR$ car $x^2 + 1 \neq 0$ pour tout réel.

2- Calculons les limites de f aux bornes de D.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$ de même :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ donc la droite d'équation (D) : y = 3 à C.

3- Calculer f'(x). $f'(x)=(\dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1})'=\dfrac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}$

4- Etudier les variations de f. le signe de $f'(x)$ dépend de $-4x^2 + 4$

pour $x\in\left]-\infty;-1\right[$; $f'(x)\prec 0$ donc f est décroissante

pour $x\in\left]-1;1\right[$; $f'(x)\succ 0$ donc f est croissante

pour $x\in\left]1;+\infty\right[$; $f'(x)\prec 0$ donc f est décroissante

6- Déterminons l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0. (T) :

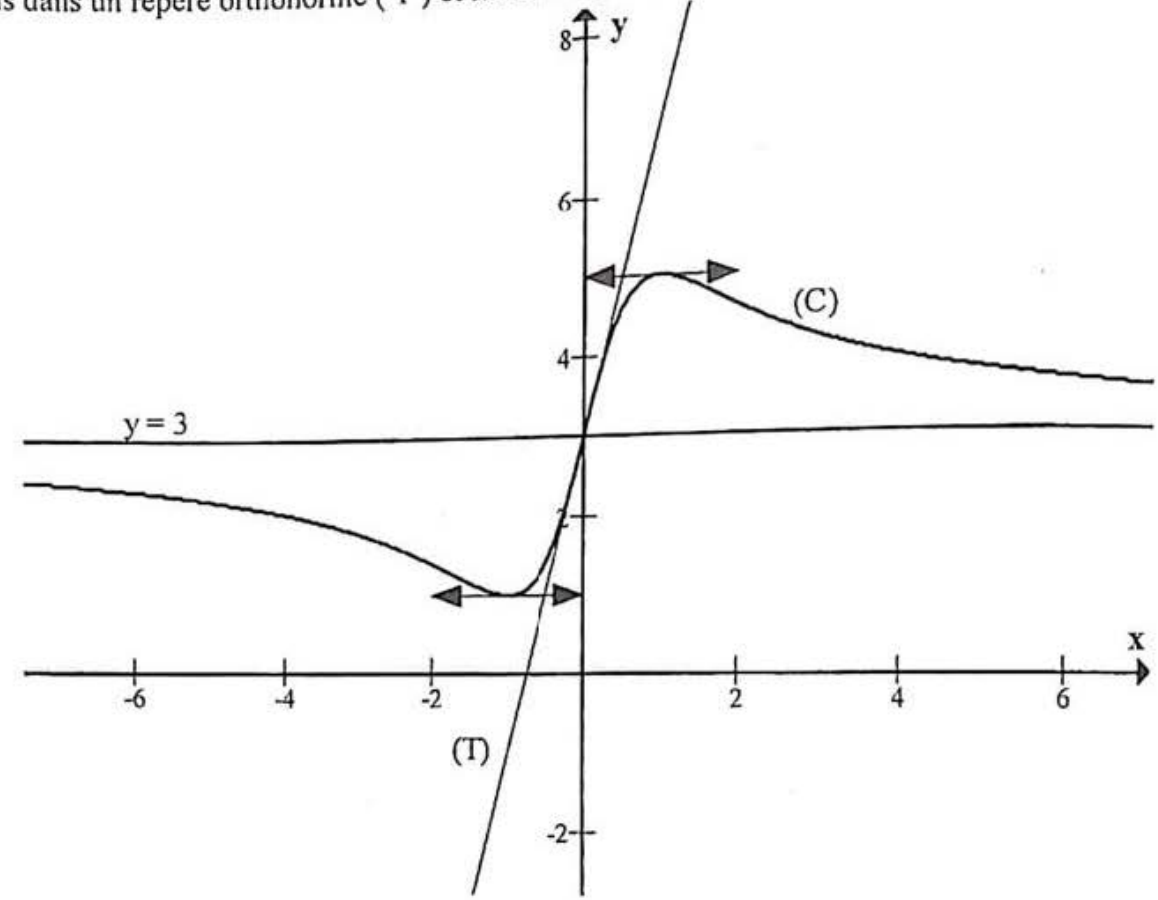
$y=f'(0)(x-0)+f(0)$, (T) : $y=4x+3$

5- Dressons le tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	-		0	+	0	-	
$f(x)$	3	↘	1	↗	5	↘	3

Scanné avec CamScanner

7- Traçons dans un repère orthonormé (T) et la courbe (C) de f.



Problème 2

1- La tangente au point d'abscisse (-2) passe par les points (-2 ;0) et (0 ; - 6) d'où : (T) : y = -3x - 6

2- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3-

- on a une asymptote oblique d'équation $x = -3$.
- On a aussi une asymptote oblique qui passe par les points(2 ; 0) et (0 ; -2) , son équation est donc $y = x-2$.

4-Pour $x \in]-3;+\infty[$, C est au dessus de l'asymptote oblique.

5-

x	-3		-1		+ ∞
f'(x)	‖	-	0	+	
f(x)	‖	+ ∞ ↘	- 1	↗	+ ∞

6- $S =]-3;-2[\cup[1;+\infty[$

Scanné avec CamScanner

Problème 3

La fonction f est définie par $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x+3}$ et C sa courbe représentative.

1.

Déterminons le domaine de définition Df de f

f existe si $x+3 \# 0 \Rightarrow x \neq -3 \Rightarrow Df =]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$

Déterminer les limites de f aux bornes de Df

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-2}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-2}{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$\lim\limits_{x\to-3-} f(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-3-} x^2+x-2=4$ et $\lim\limits_{x\to-3-} x-(-3)=0-$

$\lim\limits_{x\to-3+} f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-3+} x^2+x-2=4$ et $\lim\limits_{x\to-3+} x-(-3)=0+$

déduire l'existence d'une asymptote (Δ).

$\lim\limits_{x\to-3-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-3+} f(x)=+\infty$ donc (Δ) : $x = -3$ est une asymptote verticale à C

2. Montrer que la dérivée de f est : $f'(x)=\dfrac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}=\dfrac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+x-2}{x+3}\right)'=\frac{(2x+1)(x+3)-(x^2+x-2)}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}=\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}$$

Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-9	↘	‖	$+\infty$ ↘	-1	↗	$+\infty$

3.

Démontrons que la droite D d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe C

Calculons f(x)-(x-2) ; $f(x)-(x-2)=\dfrac{x^2+x-2}{x+3}-(x-2)=\dfrac{x^2+x-2-(x-2)(x+3)}{x+3}=\dfrac{4}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x+3}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x+3}=0$ donc

(D) : y = x-2 est asymptote à C.

Etudions les positions relatives de C par rapport à D. $f(x)-(x-2)=\dfrac{4}{x+3}$

pour $x\in]-\infty;-3[$; $f(x)-(x-2)<0$ donc D est au dessus de C

Scanné avec CamScanner

pour $x \in]-3;+\infty[$; $f(x)-(x-2) \succ 0$ donc C est au dessus de D

4. Déterminer les points d'intersection de C avec les axes des coordonnées.

- axe des ordonnées (oy) $f(0) = -\frac{2}{3} \Rightarrow C \cap (Oy) = \left\{A(0;-\frac{2}{3})\right\}$

- axe des abscisses (Ox)

Les points qui appartiennent à (Ox) ont pour ordonnée $0 = f(x)$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2+x-2}{x+3} = 0 \Rightarrow x^2+x-2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 1 ou x = -2$$

$$\boxed{C \cap (Ox) = \{B(1;0); C(-2;0)\}}$$

5. Déterminons l'équation de la tangente (T) à C au point d'abscisse 2.

(T) : $y = f'(2)(x-2)+f(2)$ donc : (T) : $y = \frac{21}{25}x - \frac{22}{25}$

6. Montrons que le point de concours des asymptotes est un centre de symétrie pour C

Les asymptotes ont pour équation $x = 3$ et $y = x-2$.

En résolvant (S) : $\begin{cases} x = -3 \\ y = x-2 \end{cases}$ trouve : $x = -3$ et $y = -5$.

Le point de concours des asymptotes est $\boxed{H(-3\ ;\ -5).}$

Montrons que $H(-3\ ;\ -5)$est un centre de symétrie pour C.

- Montrons que $(2(-3)-x) \in Df$

$x \in]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[\Rightarrow -x \in]-\infty;3[\cup]3;+\infty[\Rightarrow (-6-x) \in]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$ donc $(2(-3)-x) \in Df$

- Montrons que : $f(-6-x)+f(x) = -10$

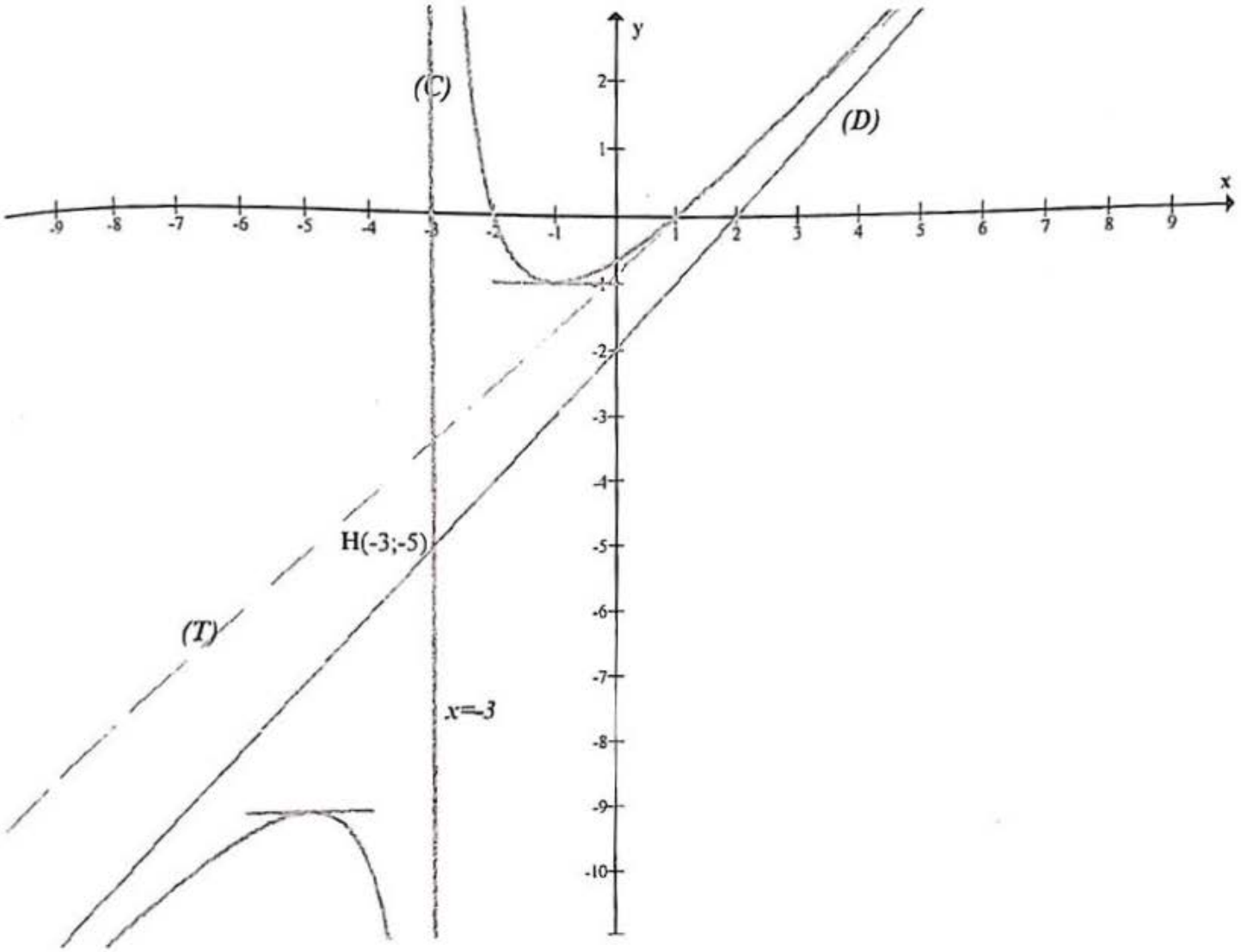
Calculons : $f(-6-x)$; $f(-6-x) = \frac{(-6-x)^2-6-x-2}{-3-x} = \frac{-x^2-11x-28}{x+3}$

$f(-6-x)+f(x) = \frac{-x^2-11x-28}{x+3} + \frac{x^2+x-2}{x+3} = \frac{-10x-30}{x+3} = -10$ donc :

$f(-6-x)+f(x) = 2(-5)$ d'où $H(-3\ ;\ -5)$ est un centre de symétrie pour C.

7. Traçons D, Δ, T, C dans un repère orthonormé (Unité : 1cm).

Scanné avec CamScanner



Problème 4

A. Répondons aux questions suivantes en utilisant le graphique

1-

- Déterminons le coefficient directeur de la de la tangente T au point I d'abscisse $x = 2$.

T passe par les points I(2 ;1) et K(1 ; 3). Le coefficient directeur de la de la tangente T est donc :

$$m = \frac{1-3}{2-1} = -2$$

- Déterminons l'équation la tangente T : $T : y = -2x + 5$.

2- limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ que le graphique laisse prévoir. $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = 1$

B. Soit la fonction $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2-4x+5}$ définie sur IR.

1. Etudions les limites de f aux bornes du domaine de définition IR. $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = 1$

Scanné avec CamScanner

La dérivée de f est : $f'(x)=\dfrac{2(x^2-4x+3)}{(x^2-4x+5)^2}=\dfrac{2(x-1)(x-3)}{(x^2-4x+5)^2}$

Etudions le signe de f'. Le signe de f' dépend de *(x-1)(x-3)*

- pour $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]3;+\infty\right[$; $f'(x)\succ 0$ et pour $x\in\left]1;3\right[$; $f'(x)\prec 0$.

2. Dressons le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	1	↗	2	↘	0	↗	1

Problème 5

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ orthonormé d'unité 1cm.

1- Déterminons le domaine de définition de f et calculons les limités aux bornes.

f existe si $x^2+2x-3\neq 0$; $x^2+2x-3\neq 0 \Rightarrow (x-1)(x+3)\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$ et $x\neq -3$

$Df=\left]-\infty;-3\right[\cup\left]-3;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$$

$$f(x)=\frac{2x+2}{(x+3)(x-1)}=\frac{2x+2}{(x-1)}\times\frac{1}{x+3}$$

$\lim\limits_{x\to-3-}f(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-3-}\dfrac{2x+2}{x-1}=1$ et $\lim\limits_{x\to-3-}x-(-3)=0-$

$\lim\limits_{x\to-3+}f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-3+}\dfrac{2x+2}{x-1}=1$ et $\lim\limits_{x\to-3+}x-(-3)=0+$

$$f(x)=\frac{2x+2}{(x+3)(x-1)}=\frac{2x+2}{(x+3)}\times\frac{1}{x-1}$$

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{2x+2}{x+3}=1$ et $\lim\limits_{x\to1-}x-1=0-$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{2x+2}{x+3}=1$ et $\lim\limits_{x\to1+}x-1=0+$

2- Donnons la nature et l'équation de chacune des asymptotes à (C).

Scanné avec CamScanner

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à C.
- $\lim_{x\to-3-} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to-3+} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x = -3$ est une asymptote verticale à C.
- $\lim_{x\to1-} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to1+} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à C.

3) calculer $f'(x)$.

$$f'(x)=\left(\frac{2x+2}{x^2+2x-3}\right)'=\frac{(2x+2)'(x^2+2x-3)-(2x+2)(x^2+2x-3)'}{(x^2+2x-3)^2}=\frac{-2(x^2+2x+5)}{(x^2+2x-3)^2}$$

4) a- Déterminons les points d'intersections A et B de (C) avec axes de coordonnées.

- $C\cap(Ox)$: Résolvons $f(x) = 0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x=-1$; $C\cap(Ox)=\{A(-1;0)\}$
- $C\cap(Oy)$: Calculons $f(0)$; $f(0) = -\frac{2}{3}$; $C\cap(Oy)=\left\{B(0;-\frac{2}{3})\right\}$

b- Donnons une équation de la tangente (T) au point A

(T) : $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$; (T) : $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

5) Dressons le tableau de variation de f.

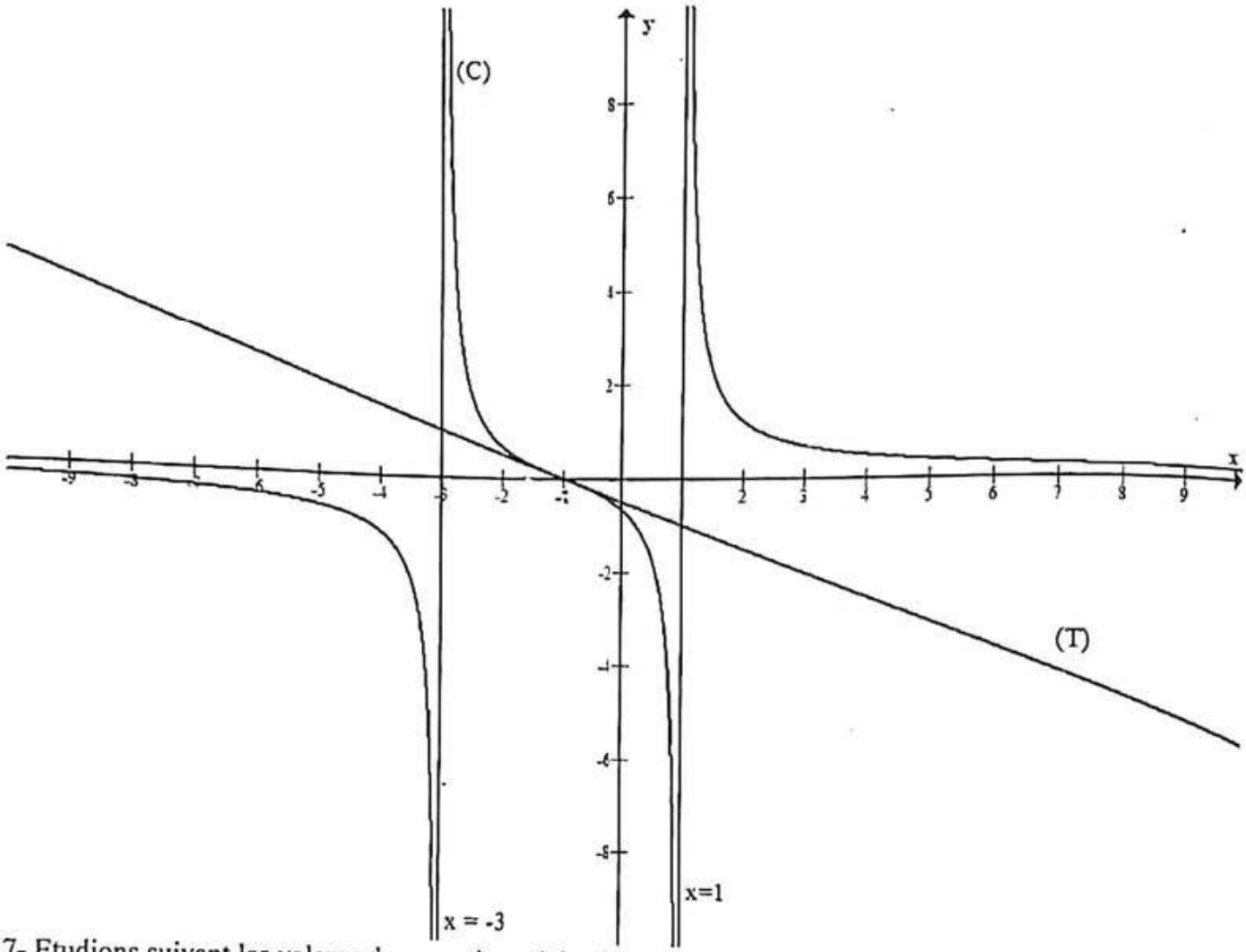
Déterminons le signe de f'. Le signe de f' dépend de $-2(x^2 + 2x + 5)$.

Le discriminant de $x^2 + 2x + 5$ est $\Delta=2^2-4(5)=-18$ donc $x^2 + 2x + 5 \succ 0$ d'où pour tout $x\in IR; f'(x)\prec 0$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
F'(x)	-	-	-	
f(x)	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 0	

6) Construire la courbe (C) dans $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Scanné avec CamScanner



7- Etudions suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de $f(x) = m$.

pour m# 0 ; l'équation $f(x) = m$. a deux solutions

pour m = 0 ; l'équation $f(x) = m$. a une solution

Problème 6

A.....

1- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2- $S = \left]-\frac{7}{2};1\right[\cup]1;+\infty[$.

B..... La fonction f est définie sur **R** par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$.

1- Calculons et étudions le signe de la fonction dérivée f'

$f'(x) = (2x^3 + 3x^2 - 12x + 7)' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x + 2)(x-1)$

- pour $x \in]-\infty;-2] \cup [1;+\infty[$; $f'(x) \geq 0$
- pour $x \in [-2;1]$; $f'(x) \leq 0$

2- Dressons le tableau de variation de f. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Scanné avec CamScanner

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	27	↘	0	↗	$+\infty$

3- Démontrons que la droite T d'équation $y = -\frac{27}{2}x+\frac{27}{4}$ est tangente à la courbe C au point I d'abscisse $x = -\frac{1}{2}$.

$T: y = f'(-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})+f(-\frac{1}{2})$; $f'(-\frac{1}{2}) = -\frac{27}{2}$ et $f(-\frac{1}{2}) = \frac{27}{2}$ donc $T: y = -\frac{27}{2}x+\frac{27}{4}$

Problème 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x+\sqrt{x^2+1}$. Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1- Déterminons l'ensemble de définition D de f. D = IR

2- Calculons les limites de f aux bornes de D.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\sqrt{x^2+1} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} = +\infty$ $\quad f(x) = x(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = 0$

3- Démontrons que la droite (D1) : $y = x$ est une asymptote à C au voisinage de $-\infty$ et que (D2) : $y = 3x$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$

$f(x)-x = x+\sqrt{x^2+1} = \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$; $f(x)-3x = -x+\sqrt{x^2+1} = \frac{-1}{-x-\sqrt{x^2+1}}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x-\sqrt{x^2+1} = -\infty$ donc (D1) : $y = x$ est une asymptote à C au voisinage de $-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-3x = \lim\limits_{x\to+\infty} -x+\sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{-x-\sqrt{x^2+1}} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} -x-\sqrt{x^2+1} = -\infty$ donc (D2) : $y = 3x$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$

4- Calculons f'(x) $\quad f'(x) = (2x)'+(\sqrt{x^2+1})' = 2+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

Signe de $f'(x)$. Résolvons $f'(x) \prec 0$; $f'(x)\prec 0 \Rightarrow x+2\sqrt{x^2+1}\prec 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}\prec -\frac{x}{2}$

- Pour $x \geq 0$; $\sqrt{x^2+1}\prec -\frac{x}{2}$ est fausse donc $f'(x)\succ 0$

Scanné avec CamScanner

Faso Livres

Ce livre ne peut- être vendu plus de 1500 CFA

-Pour $x \prec 0$; $\sqrt{x^2+1} \prec -\frac{x}{2} \Rightarrow x^2+1 \prec \frac{x^2}{4} \Rightarrow 4x^2+4 \prec x^2 \Rightarrow 3x^2+4 \prec 0$

impossible donc pour $x \prec 0$; $f'(x) \succ 0$

En conclusion pour tout $x \in IR; f'(x) \succ 0$ donc f est croissante sur IR.

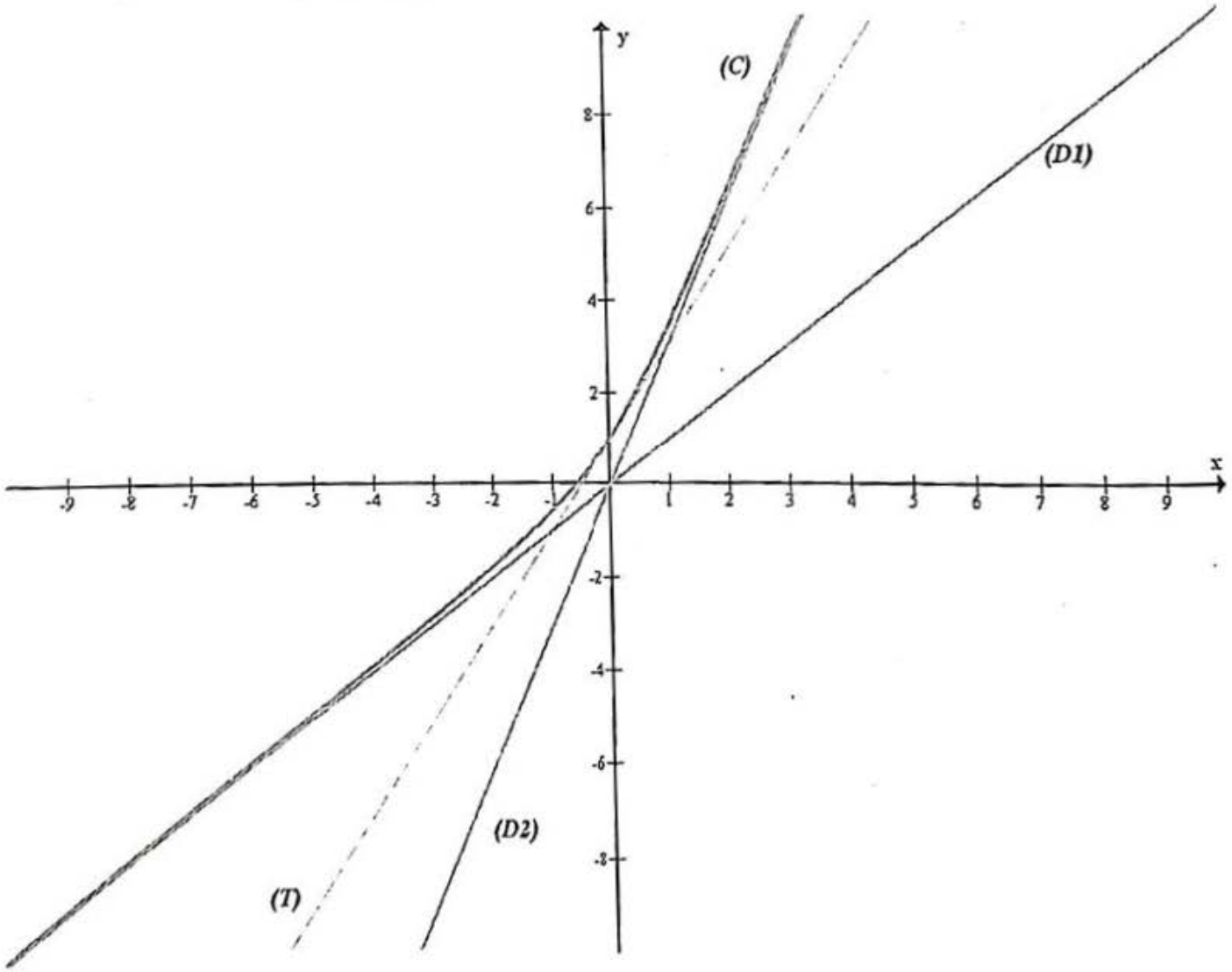
5- Dresser le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

6- Déterminons l'équation de tangente (T) à C au point d'abscisse 0.

(T) : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$; (T) : $y = 2x+1$

7- Tracer dans le même repère (D1), (D2), (T) et C



Scanné avec CamScanner

Problème 8

5- Représenter la courbe C de f dans un repère orthogonal pour $x \in [-\Pi;3\Pi]$

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$

1- Déterminons le domaine de définition D de f. D = IR car 2 + cosx # 0.

2- Montrons que f est impaire. Pour tout $x \in IR$; $-x \in IR$

$f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)}=-\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$; on a $f(-x)=-f(x)$ donc f est impaire.

3- Montrons que f est périodique de période 2π

Pour tout $x \in IR; x+2\pi \in IR$; $f(x+2\pi)=\dfrac{\sin(x+2\pi)}{2+coos(x+2\pi)}=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}=f(x)$ donc f est bien périodique de période 2π .

4- Montrons que $f'(x)=\dfrac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$

$$f'(x)=[\frac{\sin x}{2+\cos x}]'=\frac{(\sin x)'(2+\cos x)-(2+\cos x)'\sin x}{(2+\cos x)^2}=\frac{\cos x(2+\cos x)+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$$

5- Etudier les variations de f sur $[-\Pi;\Pi]$ et dresser le tableau de variation de f.

Le signe de $f'(x)$ dépend de (1 + 2cosx).

$1+2\cos x=0 \Rightarrow \cos x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{2\pi}{3} ou x=-\dfrac{2\pi}{3}$

Pour $x \in \left[-\pi;-\dfrac{2\pi}{3}\right]$; $f'(x) \le 0$; f est décroissante.

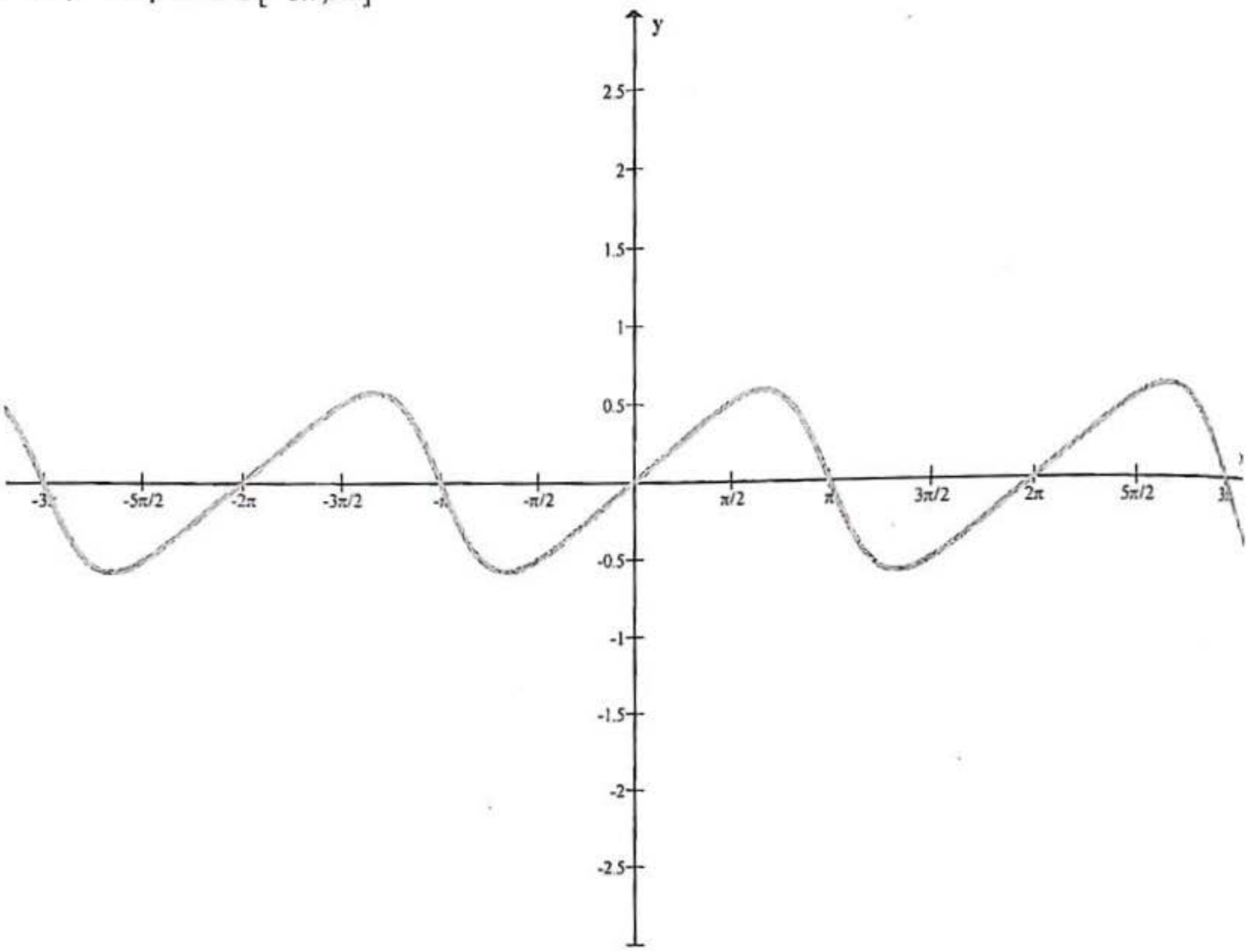
Pour $x \in \left[-\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right]$; $f'(x) \ge 0$; f est croissante

Pour $x \in \left[\dfrac{2\pi}{3};\pi\right]$; $f'(x) \le 0$; f est décroissante

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	↘	$-\sqrt{3}/3$	↗	$\sqrt{3}/3$	↘	0

Scanné avec CamScanner

6- Traçons C pour $x \in [-3\pi;3\pi]$



Scanné avec CamScanner

Scanné avec CamScanner

UNE NATION S'INSTRUIT ELLE-MEME

Français CEP	700 F	Eno + Corrigés P. C. 1° :	1000 F
CALCUL CEP	800 F	PC 1° JR (Cours-Enoncés-Corrigés) (Nouveau)	2500 F
Q/R Sc.N-H-G. CEP	700 F	Sc. Naturelles 1° :	700 F
ANNA CEP (1994-2005)	1500 F	Math 1° D	1500 F
Sc. Naturelles 6ème :	800 F	Français BAC (Nouveau):	1000 F
I PLAY (tous niveaux)	600 F	Allemand BAC A4 :	1500 F
Math 6°	1500 F	BIOLOGIE TD :	1500 F
Mon Compagnon du Collège	1000 F	PC Term + Cor	1500 F
Français 6° 5° (Nouveau)	1000 F	PC Term JR tome I : (Nouveau)	1000 F
		PC Term JR tome II : (Nouveau)	1000 F
		PC Term JR tome III : (en cours)	1000 F
PC 4 ème :	1500 F	MATH TC et TD Tome A	1500 F
Math 4 ème	1000 F	MATH TC et TD Tome B	1500 F
Français 4° 3° (Nouveau)	1000 F	ANNA MATH BAC (2013-2018)	1500 F
		MATH TA	1000 F
Français BEPC :	700 F	Philo Term :	1500 F
Sc. Nat BEPC :	800 F	Cours Philo 1° et T°:	2000 F
Anatomie Humaine:	800 F	Hist.Géo Term	1500 F
Math. BEPC :	1000 F		
Q/R PC. BEPC :	700 F	COMPTABILITE	1500 F
		Cor-Comptabilité	1500 F
PC Cours 3° JR (Nouveau)	1500 F		
Hist. Géo. BEPC :	800 F	Cours de Sociologie (Nouveau)	1000 F
VOCABULARY (1er cycle) :	800 F		
ANGLAIS 4e / BEPC	800 F	PEDAGOGIE (ENEP)	1500 F
Je prépare mon BEPC (Ang-Fr-Hist géo-SVT)	500 F		
BEPC 2012 à 2017 (Nouveau)			
		Collection Diana : SHEKINA	1500 F
Eno P.C. 2nde + Cor :	1500 F	Collection Diana : LILU	1500 F
PC 2nde (Cours-Enoncés-Corrigés) (Nouveau)	2500 F		
MATH 2nde :	1000 F	Dict. DIOULA / FRANÇAIS	2500 F
ENJOY 2nde, 1° et T°	800 F	BD Kolokolo (et les autres...):	4000 F

Dépôt Légal 1er trimestre 2011

ISBN 2 - 913669 – 47 - 6

Ce livre ne coûte que 1500 CFA

BOUTIQUE FASO LIVRES A OUAGA Square Naaba Koom (gare de train) 25-41-06-60

FASO LIVRES
BP : 658 Tel : 20- 98-28-01
Bobo Dioulasso (Burkina Faso)

Scanné avec CamScanner